I 24772

7022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XIX.

—

ANUL 1939—1940

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCA"
1940

'06

TAM 2014

I 24772

ANUL XIX. 15 MARTIE 1939 NO. 1.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. NOTE MATEMATICE: 1.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. INSTIINTARE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1296, 1525.
6. PROBLEME PROPUSE: 1752–1759.
7. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

2466

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

Revista Matematică din Timişoara, apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti.
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M. Cogălniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
6. **Almăjan P.** Locot, Licenţiat în matematici, str. Zaharia 23, Bucureşti.
7. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, înzestrarea căilor ferate, întinderea exploatării, la Şc. Polit., Timişoara.
8. **Andronescu P.** Doctor-Inginer, Profesor de Electrotechnică la Şc. Polit., Timişoara.
9. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
10. **Ardeleanu Şt.** Inginer, Profesor la Şcoala Sup. de Arte şi Meserii, Asistent pe lângă catedra de Technologie, Şc. Polit., Timişoara.
11. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
12. **Baidaff B. I.** Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).
13. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie la Şc. Polit., Timişoara.
14. **Balazs D.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă dela Şc. Polit., Timişoara, str. Gen. Joffre 12.
15. **Bănărescu M.** Inginer, Director la Atelierele C. F. R., Profesor la Catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit., Timişoara, str. Doja 51.
16. **Banciu I. Prof.,** Directorul „Casei de Depuneri", str. Lucaci 95, Bucureşti.
17. **Bărglăzan A.** Inginer, Conferenţiar la Maşini Hidraulice, dela Şc. Polit., Timişoara.
18. **Baron C.** Asistent la catedra de Fizică dela Şc. Politechnică, Timişoara.
19. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Profesor la catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
20. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit., Timişoara.
21. **Bonea I.** Inginer, Conferenţiar la Topografie şi Geodezie, Şcoala Politechnică, Timişoara.
22. **Botez M.** Doctor în Matematici, Directorul Şcoalei Superioare de Comerţ din Piatra-Neamţ.
23. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi Liceul Milit., str. Speranţei 12, Iaşi.
24. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la catedra de astronomie dela Universitatea din Cluj.
25. **Breazu D.** Profesor de liceu, Bucureşti.
26. **Buicliu Gh.** General de Artilerie. Fost 10 ani profesor de Geometrie Analitică la Şcoala Politechnică din Timişoara. Insărcinat cu conferinţa de Balistică Exterioară la Şcoala Politechnică din Bucureşti, str. M. Cogălniceanu 10, Bucureşti II.
27. **Câlniceanu C.** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini la Şc. Polit., Timişoara.
28. **Cândea C.** Doctor-Inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie la Şc. Polit. din Timişoara.
29. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Şc. Polit. din Timişoara.
30. **Claudian Virgil,** Profesor la liceul Mihai Viteazul din Bucureşti.
31. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de limba engleză la Şc. Polit. din Timişoara.
32. **Coman A.** Profesor liceul „C. Diaconovici-Loga", Profesor onorific la Şc. Politechnică din Timişoara.
33. **Comănescu A.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din T.-Măgurele.
34. **Constantinescu G. G.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul di Tecuci.
35. **Costantinescu Gh.** Profesor la lic. Lazăr, Bucureşti.
36. **Contrea A.** Doctor în Ştinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineraogie şi Petrografie dela Şc. Polit., Timişoara.
37. **Costăchescu D. C.** Lt. de Marină, Constanţa.
38. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
39. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Şc. Polit., Timişoara.
40. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice dela Şc. Polit., Timişoara.
41. **Curea I.** Profesor de matematici la liceul din Cluj şi astronom la Observatorul Universităţii.
42. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
43. **Diaconescu N.** Profesor la liceul din Slatina.
44. **Dobrozemsky M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
45. **Dumitriu-Dada.** Profesor la Colegiul Carol I, Craiova.
46. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
47. **Frătici. I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Cazane, dela Şc. Politechnică, Timişoara.
48. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti.
49. **Gheorghiu V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Mecanică şi Hidraulică dela Şc. Polit., Timişoara.
50. **Ghermănescu M.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică, Directorul Şcoalei P. T. T., Timişoara.
51. **Ghiţescu Spiridon,** Profesor secundar, Mizil.
52. **Gloden A.** Profesor à l'Athénée, Rue Jean Jaurés 11, Luxembourg.
53. **Hristea H.** Inginer-Inspector General la C. F. R., Bucureşti.
54. **Ionescu-Bis H. P.** Profesor la liceul din Oltenita.
55. **Ionescu C-tin Bujor.** Licenţiat în Matematici, Profesor, str. Maior Popescu Gh. 26, Bucureşti.
56. **Ionescu-Ţiu D. C.** Locot., Licenţiat în Matematici, Bucureşti.
57. **Iorgulescu T.** Prof. la liceul Loga, Asistent pe lângă catedra de Geologie dela Şc. Polit., Timişoara.
58. **Ivănescu Cezar.** Profesor.
59. **Kielburger M. Inginer,** Asistent pe lângă Catedra de Electrotechnică dela Şc. Polit., Timişoara.
60. **Kühn I.** Doctor în Chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie Generală dela Şc. Polit., Timişoara.
61. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică. Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială la Şc. Polit., Timişoara.

62. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şcoala Polit., Timişoara.
63. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Polit., Timişoara.
64. **Linteş I.** Maior de Artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.
65. **Liteanu Gh.** Colonel de Artilerie, str. L. Carageale 30, Bucureşti.
66. **Lupan A.** Inginer, Prof. la Şc. Polit. din Timişoara.
67. **Macovski Eug.** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
68. **Manughevici** C. Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şc. Politechnică, Timişoara.
69. **Mardan D.** Inginer inspector general, Directorul Fabricei de tutun. Prof. la Şc. Polit., din Timişoara.
70. **Marinescu I.** Doctor-Inginer. Conferenţiar la Şc. Politechnică din Timişoara.
71. **Mateescu S.** Doctor în Ştiinţele Naturale. Profesor la Catedra de Geologie dela Şc. Polit., din Timişoara.
72. **Mihaiu Edith,** Inginer, asistentă la Şcoala Politechnică din Timişoara.
73. **Mihăileanu N. N.** Profesor la lic. din Arad, str. V. Alexandri 6, Arad.
74. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă dela Şcoala Polit., Timişoara.
75. **Mioc V.** Licenţiat în Matematici, Inspector şcolar, Asistent pe lângă catedra de Analiza Matematică dela Şc. Polit., din Timişoara.
76. **Murgulescu Elena.** Licenţiată în Matematici, Asistentă la Şc. Polit. din Timişoara.
77. **Murgulescu G. I.** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şc. Polit., din Timişoara.
78. **Nadaşan Şt.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor dela Şc. Polit., Timişoara.
79. **Naneş Gh.** Profesor la lic. Sf. Sava, Bucureşti.
80. **Scorpan Al.** Inginer depoul C. F. R., asistent la Şcoala Politechnică din Timişoara.
81. **Scărlătescu D.** Inginer, asistent la Şcoala Politechnică din Timişoara, profesor la liceul industrial.
82. **Grigore Virgil,** Inginer atelierele C. F. R., asistent la Şcoala Politechnică, Timişoara.
83. **Nicolau A.** Inginer, Profesor la Şc. Polit., din Timişoara.
84. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
85. **Ogrin N.** Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
86. **Onicescu O.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, str. Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
87. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
88. **Orăşeanu Gr.** Profesor secundar, Bucureşti.
89. **Patriciu Valeriu.** Doctor, Profesor la catedra de Geologie Economică şi Zăcăminte, la Şcoala Politechnică, Timişoara.
90. **Petrescu A.** Profesor la Academia Agricolă, Bucureşti.
91. **Popescu E.** Doctor în chimie, Profesor la Şcoala Polit., Bucureşti.
92. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şc. Polit. din Timişoara.
93. **Protopopescu I.** Inginer-Şef, Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
94. **Purcariu I.** Doctor în Fizică, Prof. la Academia Comercială, Bucureşti.
95. **Racliş N. R.** Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Profesor, Bucureşti.
96. **Răduleţ R.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
97. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.
98. **Sauciuc L.** Licenţiat în chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie dela Şc. Polit. din Timişoara.
99. **Savin C. Ion.** Licenţiat în Matematici, str. Sărăriei 56, Iaşi.
100. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara, Directorul Şcoalei P. T. T., Timişoara.
101. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Profesor la Universitatea din Cluj.
102. **Severineanu C.** Inginer-Şef, Subdirectorul Tracţiunii C. F. R., Profesor la Universitatea din Cluj.
103. **Simionescu Gh. D.** Dicenţiat în Matematici, Profesor la lic. Militar din Târgovişte.
104. **Smighelschi O.** Inginer la Fabrica „Nitrogen", Dicio-Sân-Martin.
105. **Stamatescu I.** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
106. **Stambuleanu A.** Doctor-Inginer la C.F.R. Timişoara.
107. **Stan A.** Locotenent de Artilerie, licenţiat matematici, Cluj.
108. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
109. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Şc. Polit., Timişoara.
110. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini dela Şcoala Polit. din Timişoara.
111. **Stoicescu M.** Profesor la lic. „G. Lazăr", Bucureşti
112. **Suhov I.** Inginer, Asistent la Şc. Polit., Timişoara.
113. **Teodorescu C.** Inginer-Şef, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.
114. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură din Cluj.
115. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometria Analitică dela Şc. Polit., Timişoara.
116. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului de perfecţionare al Şcoalei Politechnice din Timişoara, Str. Londra 44, Bucureşti.
117. **Vescan T.** Profesor, Licenţiat în Ştiinţe Fizice şi Matematice, preparator al Institutului de Fizică teoretică şi aplicată al Universităţii din Cluj.
118. **Viciu Aurel.** Profesor la lic. Milit., Tg-Mureş.
119. **Vlad I. V.** Inginer-Architect, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
120. **Vlădescu I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şcoala Polit. din Timişoara.
121. **Zăgănescu I.** Inginer la C. F. R. şi Asistent la Şc. Polit., Timişoara.
122. **Zaharia N. O.** Profesor la lic. Militar, Tg-Mureş.
123. **Zapan Gr.** Cpt. Comandor-Aviator, Inginer, Comandantul Şcoalei de Ofiţeri de aviaţie „Carol II" Bucureşti II, Calea Griviţei 158.

ANUL XIX — No. 1 TIMISOARA, 15 MARTIE 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

DE
V. ALACI
PROFESOR

(urmare)

ALTE TEOREME ȘI RELAȚIUNI IN CARE INTERVIN UNGHIURILE ASOCIATE α, β, γ.

62. **Teorema 1-a.** *Raza cercului înscris într'un triunghiu oarecare* A B C, *este egală cu una din înălțimi înmulțită cu sinusul patratic al unghiului asociat corespunzător.*

Demonstrație. Relațiunile cunoscute,

$$2S = 2pr = a h_a = b h_b = c h_c$$

în virtutea *teoremei 1-a* de la No. 59, devin

$$2pr = 2p h_a \, sp\,\alpha = 2p h_b \, sp\,\beta = 2p h_c \, sp\,\gamma .$$

De aci deducem,

$$(49) \qquad \boxed{r = h_a \, sp\,\alpha = h_b \, sp\,\beta = h_c \, sp\,\gamma}$$

și teorema este astfel stabilită.

Consecință. Scoțând din (49) valorile lui $sp\,\alpha$, $sp\,\beta$, $sp\,\gamma$ și înlocuindu-le în (36) (No. 49), obținem identitatea, de altfel cunoscută:

$$(50) \qquad \boxed{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}} .$$

63. **Teorema 2-a.** *Intr'un triunghiu oarecare* A B C, *notațiile fiind cele obicinuite, avem relațiile:*

$$(51) \qquad \boxed{sp\,\alpha = \frac{r_a - r}{2r_a}}, \quad \boxed{sp\,\beta = \frac{r_b - r}{2r_b}}, \quad \boxed{sp\,\gamma = \frac{r_c - r}{2r_c}} .$$

Demonstrație. Dacă în relațiile cunoscute,

$$S = pr = (p-a) r_a = (p-b) r_b = (p-c) r_c ,$$

(F. G. M.,[1] p. 210),

înlocuim laturile cu valorile lor scoase din relațiile (35) (No. 59), avem:

$$pr = (p - 2p\,sp\,\alpha) r_a = (p - 2p\,sp\,\beta) r_b = (p - 2p\,sp\,\gamma) r_c .$$

De aci deducem:

$$sp\,\alpha = \frac{r_a - r}{2r_a}, \quad sp\,\beta = \frac{r_b - r}{2r_b}, \quad sp\,\gamma = \frac{r_c - r}{2r_c},$$

tocmai relațiile (51).

Consecință. Substituind în (36) (No. 59) valorile lui $sp\,\alpha$, $sp\,\beta$, $sp\,\gamma$ din relațiile (51), obținem identitatea, de altfel cunoscută:

$$(52) \qquad \boxed{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}} .$$

64. *Observare importantă.* Orice relațiune din *Trigonometria circulară*, în care intră laturile sau sinusurile unghiurilor unui triunghiu, în virtutea relațiilor (35) (No. 59), sau (37) (No. 60), se poate transforma într'o relațiune în care laturile a, b, c se înlocuesc prin $2p\,sp\,\alpha$, $2p\,sp\,\beta$, $2p\,sp\,\gamma$, iar $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ se înlocuesc prin $\frac{p}{R} sp\,\alpha$, $\frac{p}{R} sp\,\beta$, $\frac{p}{R} sp\,\gamma$.

Câteva exemple. Următoarele relațiuni cunoscute,

$$(53) \qquad a = b \cos C + c \cos B ,$$

$$(54) \qquad b \cos B + c \cos C = a \cos (B - C) ,$$ (C. de P.,[2] p. 7);

[1]) F. G. M., înseamnă: *Complément de Trigonométrie*, par F. G. M.

[2]) C. de P., înseamnă: Culegere de Probleme de Trigonometrie, de *V. Cristescu*, revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu*, Partea II-a.

(55) $$b\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{B}{2}=p-a,$$

(56) $$b\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{B}{2}=p,$$ (C. de P., p. 7);

(57) $$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0,$$ (C. de P., p. 7),

(58) $$a=(b+c)\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},$$ (F. G. M., p. 259),

(59) $$\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}=\frac{r}{R},$$ (F. G. M., p. 588),

transformate după metoda expusă, devin respectiv:

(53′) $$sp\,\alpha=sp\,\beta\cos C+sp\,\gamma\cos B,$$

(54′) $$sp\,\beta\cos B+sp\,\gamma\cos C=sp\,\alpha\cos(B-C),$$

(55′) $$2\,sp\,\beta\sin^2\frac{C}{2}+2\,sp\,\gamma\sin^2\frac{B}{2}=\operatorname{tg}(45^0-\alpha),$$

(56′) $$sp\,\beta\cos^2\frac{C}{2}+sp\,\gamma\cos^2\frac{B}{2}=\frac{1}{2},$$

(57′) $$sp\,\alpha\sin(B-C)+sp\,\beta\sin(C-A)+sp\,\gamma\sin(A-B)=0,$$

(58′) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

(59′) $$sp\,\alpha\cos A+sp\,\beta\cos B+sp\,\gamma\cos C=\frac{r}{R}.$$

Alte exemple. Să considerăm încă următoarele relaţiuni cunoscute într'un triunghiu,

(60) $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc},$$ (F. G. M., p. 171);

(61) $$S=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A},$$ F.G.M., p. 210,

în care să înlocuim laturile, sau laturile şi sinusurile unghiurilor prin expresiile menţionate.

Relaţia (60) devine astfel, ţinând seamă că din (36) $sp\,\beta+sp\,\gamma=cp\,\alpha$,

(60′) $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{cp^2\alpha-sp^2\alpha}{4\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}=\frac{cp\,\alpha-sp\,\alpha}{4\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{4\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}.$$

Relaţiile (61) devin:

(61′) $$S=\frac{2p^3\,sp\,\alpha\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}{R}=\frac{a^2\,p\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}{2R\,sp\,\alpha}.$$

Consecinţe. 1°. Prima relaţie din (61) se poate scri încă,

$$S=pr=\frac{bc\,p\,sp\,\alpha}{2R},$$

deci:

$$2Rr=bc\,sp\,\alpha=ca\,sp\,\beta=ab\,sp\,\gamma.$$

De aci deducem identitatea:

(62) $$\boxed{bc\,sp\,\alpha+ca\,sp\,\beta+ab\,sp\,\gamma=6Rr}.$$

2°. Din a 2-a relaţie (61′) şi analoagele ei, ţinând seamă că $S=pr$, deducem:

$$sp\,\alpha=\frac{a^2\,sp\,\beta\,sp\,\gamma}{2Rr},$$

$$sp\,\beta=\frac{b^2\,sp\,\gamma\,sp\,\alpha}{2Rr},\qquad sp\,\gamma=\frac{c^2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta}{2Rr}.$$

Inlocuind aceste valori în (36) (No. 59), obţinem identitatea:

(63) $$\boxed{a^2\,sp\,\beta\,sp\,\gamma+b^2\,sp\,\gamma\,sp\,\alpha+c^2\,sp\,\alpha\,sp\,\beta=2Rr}.$$

Relaţiuni remarcabile într'un triunghiu oarecare.

65. **Teorema 1-a**. *Intr'un triunghiu oarecare* A B C, *notaţiile fiind cele obicinuite, avem relaţiunea:*

(64) $$\boxed{\frac{b-c}{sp\frac{A}{2}}+\frac{c-a}{sp\frac{B}{2}}+\frac{a-b}{sp\frac{C}{2}}=0}.$$

Demonstraţie. Din relaţiile fundamentale (35) (No. 59), deducem:

(65) $$b-c=2p(sp\,\beta-sp\,\gamma).$$

Ţinând însă seamă de relaţiile (44) (No. 60), putem scri succesiv:

$$sp\,\beta - sp\,\gamma = \frac{cp\frac{C}{2} - sp\frac{A}{2}}{2\,cp\frac{C}{2}cp\frac{A}{2}} - \frac{cp\frac{A}{2} - sp\frac{B}{2}}{2\,cp\frac{A}{2}cp\frac{B}{2}} = \frac{cp\frac{B}{2}cp\frac{C}{2} - cp\frac{B}{2}sp\frac{A}{2} - cp\frac{C}{2}cp\frac{A}{2} + cp\frac{C}{2}sp\frac{B}{2}}{2\,cp\frac{A}{2}cp\frac{B}{2}cp\frac{C}{2}} =$$

$$\frac{cp\frac{C}{2}\left(1 - sp\frac{B}{2}\right) - cp\frac{B}{2}\left(1 - cp\frac{A}{2}\right) - cp\frac{C}{2}cp\frac{A}{2} + cp\frac{C}{2}sp\frac{B}{2}}{2\,cp\frac{A}{2}cp\frac{B}{2}cp\frac{C}{2}} = \frac{cp\frac{C}{2} - cp\frac{B}{2} - cp\frac{A}{2}\left(cp\frac{C}{2} - cp\frac{B}{2}\right)}{2\,cp\frac{A}{2}cp\frac{B}{2}cp\frac{C}{2}},$$

sau:

$$sp\,\beta - sp\,\gamma = \frac{sp\frac{A}{2}\left(cp\frac{C}{2} - cp\frac{B}{2}\right)}{2\,cp\frac{A}{2}cp\frac{B}{2}cp\frac{C}{2}}.$$

Substituind această valoare în (65), scriind şi relaţiile analoage, găsim:

$$\frac{b-c}{sp\frac{A}{2}} = \frac{p\left(cp\frac{C}{2} - cp\frac{B}{2}\right)}{cp\frac{A}{2}cp\frac{B}{2}cp\frac{C}{2}},$$

$$\frac{c-a}{sp\frac{B}{2}} = \frac{p\left(cp\frac{A}{2} - cp\frac{C}{2}\right)}{cp\frac{A}{2}cp\frac{B}{2}cp\frac{C}{2}},$$

$$\frac{a-b}{sp\frac{C}{2}} = \frac{p\left(cp\frac{B}{2} - cp\frac{A}{2}\right)}{cp\frac{A}{2}cp\frac{B}{2}cp\frac{C}{2}}.$$

Adunând aceste relaţii obţinem,

$$\frac{b-c}{sp\frac{A}{2}} + \frac{c-a}{sp\frac{B}{2}} + \frac{a-b}{sp\frac{C}{2}} = 0,$$

tocmai relaţia din enunţ.

Altă soluţie. Dacă adunăm identităţile,

$$(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0,$$

$$(b-c)\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + (c-a)\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + (a-b)\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = 0.$$

(C. de P., p. 7),

avem,

(66) $$(b-c)\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right) + (c-a)\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right) +$$

$$(a-b)\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) = 0.$$

Cum în general dacă $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$,

$$1 + \operatorname{cotg}\alpha = 1 + \frac{cp\,\alpha}{sp\,\alpha} = \frac{1}{sp\,\alpha},$$

relaţia (66) devine:

$$\frac{b-c}{sp\frac{A}{2}} + \frac{c-a}{sp\frac{B}{2}} + \frac{a-b}{sp\frac{C}{2}} = 0,$$

tocmai relaţia (64).

Consecinţă. Dacă în relaţia (65) înlocuim $sp\,\beta$, $sp\,\gamma$ prin valorile lor din (51) (No. 63), avem:

$$b - c = p\left(\frac{r_b - r}{r_b} - \frac{r_c - r}{r_c}\right) = \frac{p\,r\,(r_b - r_c)}{r_b\,r_c},$$

şi analog:

$$c - a = \frac{p\,r\,(r_c - r_a)}{r_c\,r_a}, \qquad a - b = \frac{p\,r\,(r_a - r_b)}{r_a\,r_b}.$$

Substituind în (64) aceste valori ale lui $b-c$, $c-a$, $a-b$, obţinem identitatea:

$$\boxed{\frac{r_a\,(r_b - r_c)}{sp\frac{A}{2}} + \frac{r_b\,(r_c - r_a)}{sp\frac{B}{2}} + \frac{r_c\,(r_a - r_b)}{sp\frac{C}{2}} = 0}.$$

66. **Teorema 2-a.** *Dacă în triunghiul* A B C, *în care unghiurile* B *şi* C *sunt ascuţite, ducem*

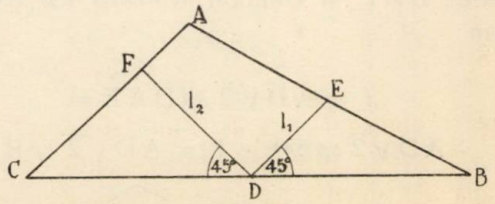


Fig. 16.

din mijlocul D *a laturei* B C *segmentele de dreaptă*

$$DE = l_1, \qquad DF = l_2,$$

înclinate cu 45° față de BC (*fig. 16*), *atunci avem relația:*

$$\boxed{\frac{l_1}{sp\,B} = \frac{l_2}{sp\,C}}. \tag{68}$$

Demonstrație. Considerăm triunghiurile semidreptunghice DBE și DCF, care au unghiurile B și C ascuțite astfel că putem aplica *teorema 1-a* (No. 54) și avem:

$$l_1 = DB\sqrt{2}\ sp\,B, \qquad l_2 = CD\sqrt{2}\ sp\,C.$$

Cum $DB = CD$, deducem:

$$\frac{l_1}{sp\,B} = \frac{l_2}{sp\,C},$$

tocmai relația cerută.

67. **Teorema 3-a.** *Dacă în triunghiul* ABC, *în care unghiurile* B *și* C *sunt ascuțite, ducem din* D *piciorul înălțimei din* A, *segmentele de dreaptă*

$$DE = l_1, \qquad DF = l_2,$$

înclinate cu 45° față pe BC (*fig. 17*), *atunci avem relația:*

$$\boxed{\frac{l_1}{cp\,B} = \frac{l_2}{cp\,C}}. \tag{69}$$

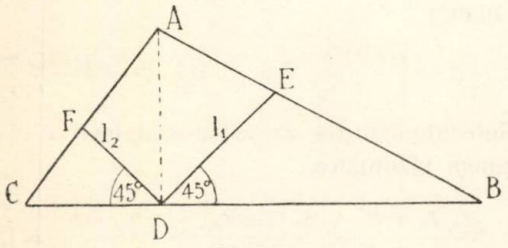


Fig. 17.

Demonstrație. Unghiurile B și C fiind ascuțite, înălțimea din A cade în interiorul triunghiului ABC.

Acum considerăm triunghiurile semidreptunghice DAE, DAF și conform *teoremei 1-a* (No. 54), avem:

$$l_1 = AD\sqrt{2}\ sp\,\widehat{DAE} =$$

$$AD\sqrt{2}\ sp\,(90^\circ - B) = AD\sqrt{2}\ cp\,B,$$

$$l_2 = AD\sqrt{2}\ sp\,\widehat{DAF} =$$

$$AD\sqrt{2}\ sp\,(90^\circ - C) = AD\sqrt{2}\ cp\,C.$$

De aci deducem cu ușurință:

$$\frac{l_1}{cp\,B} = \frac{l_2}{cp\,C}.$$

Teorema este astfel stabilită.

68. **Teorema 4-a.** *Int'un triunghiu oarecare* ABC, *notațiile fiind cele obicinuite, avem relația:*

$$\boxed{sp\,\frac{B-C}{2} = \frac{cp\,\frac{A}{2}}{1 + \frac{2c}{b-c}\,sp\,\frac{A}{2}}}. \tag{70}$$

Demonstrație. In relația cunoscută

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{(b-c)\,cp\,\frac{A}{2}}{(b+c)\,sp\,\frac{A}{2}},$$

aplicăm o proprietate cunoscută a proporțiilor și avem:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}} = \frac{(b-c)\,cp\,\frac{A}{2}}{(b-c)\,cp\,\frac{A}{2} + (b+c)\,sp\,\frac{A}{2}}.$$

Conform primei formule din tabloul (11) (No. 13., P., I-a) și a formulei (4) (No. 10., P., I-a), această relație se mai poate scri:

$$sp\,\frac{B-C}{2} = \frac{(b-c)\,cp\,\frac{A}{2}}{b-c+2c\,sp\,\frac{A}{2}} = \frac{cp\,\frac{A}{2}}{1+\frac{2c}{b-c}\,sp\,\frac{A}{2}},$$

tocmai relația (70) cerută.

Observare. Iată cum putem simplifica încă relația (70).

Determinăm unghiul φ astfel ca,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2c}{b-c}\,sp\,\frac{A}{2}. \tag{71}$$

Atunci,

$$1 + \frac{2c}{b-c}\,sp\,\frac{A}{2} = 1 + \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{cp\,\varphi},$$

și relația (70) ia forma simplă

$$\boxed{sp\,\frac{B-C}{2} = cp\,\frac{A}{2}\,cp\,\varphi}, \tag{70'}$$

φ fiind determinat din relația (71).

Relaţiuni în care intervin, raza cercului înscris şi razele cercurilor exînscrise într'un triunghiu.

69. *Intr'un triunghiu oarecare, notaţiile fiind cele obicinuite, avem relaţiile*

$$\boxed{r=(r+p-a)\,sp\frac{A}{2}}, \qquad \boxed{p-a=(r+p-a)\,cp\frac{A}{2}}; \tag{72}$$

$$\boxed{r_a=(r_a+p)\,sp\frac{A}{2}=(r_a+p-c)\,cp\frac{B}{2}=(r_a+p-b)\,cp\frac{C}{2}}, \tag{73}$$

precum şi acele ce se obţin prin permutări.

Construim cercul înscris O şi cel circumscris O_a al triunghiului A B C (fig. 18).

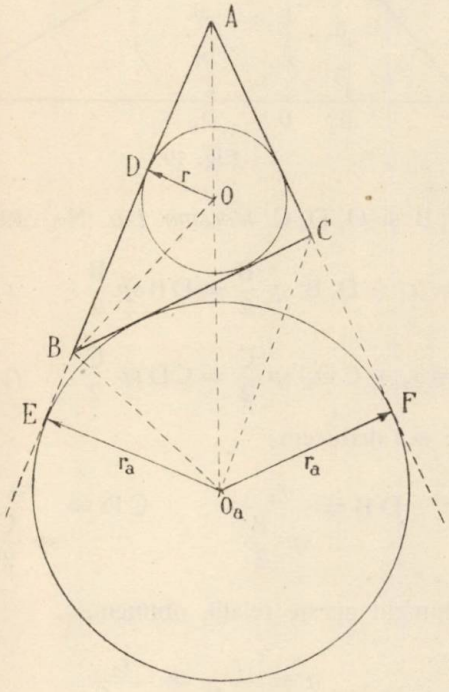


Fig. 18.

Ţinând seamă că,

$$AD=p-a, \qquad AE=p, \quad \text{(F. G. M., p. 173)},$$

şi aplicând *teorema 1-a* (No. 49), triunghiului dreptunghic D A O, relaţiile (72) apar evidente.

Aplicând aceiaşi teoremă triunghiurilor dreptunghice E A O_a, E B O_a, F C O_a, având în vedere că

$$\widehat{BO_aE}=\frac{B}{2}, \qquad \widehat{CO_aF}=\frac{C}{2},$$

şi relaţiile (73) sunt evidente.

70. *Caz particular,* $A=90^0$. In acest caz, $sp\frac{A}{2}=cp\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ şi din relaţiile (72) şi (73) rezultă:

$$r=p-a, \qquad r_a=p. \tag{74}$$

Dacă considerăm acum relaţiile analoage cu (72), precum şi ultimele relaţii (73), anume

$$r=(r+p-b)\,sp\frac{B}{2}=(r+p-c)\,sp\frac{C}{2},$$

$$r_a=(r_a+p-c)\,cp\frac{B}{2}=(r_a+p-b)\,cp\frac{C}{2},$$

şi avem în vedere relaţiile (74), putem scri;

$$r=(p-a+p-b)\,sp\frac{B}{2}=(p-\ \ +p-c)\,sp\frac{C}{2},$$

$$r_a=(2p-c)\,cp\frac{B}{2}=(2p-b)\,cp\frac{C}{2}.$$

De aci deducem:

$$\boxed{r=c\,sp\frac{B}{2}=b\,sp\frac{C}{2}}, \tag{75}$$

$$\boxed{r_a=(a+b)\,cp\frac{B}{2}=(a+c)\,cp\frac{C}{2}}. \tag{76}$$

Considerând apoi relaţiile analoage cu (73)

$$r_b=(r_b+p-a)\,cp\frac{C}{2}=(r_b+p-c)\,cp\frac{A}{2},$$

$$r_c=(r_c+p-b)\,cp\frac{A}{2}=(r_c+p-a)\,cp\frac{B}{2}. \tag{77}$$

şi ţinând seamă că $cp\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$, deducem

$$r_b=p-c, \qquad r_c=p-b.$$

Aceste valori la rândul lor le înlocuim în (77), acolo unde nu întră unghiul A şi obţinem:

(78) $\boxed{r_b = b\, cp\, \frac{C}{2}}$, $\boxed{r_c = c\, cp\, \frac{B}{2}}$.

Privind acum relaţiile (75), (76) şi (78), putem enunţa următoarea *teoremă remarcabilă.*

Teoremă. *Intr'un triunghiu dreptunghic:*

1°. *Raza cercului înscris este egală cu o catetă înmulţită cu sinusul patratic al jumătăţii unghiului adiacent.*

2°. *Raza cercului exînscris corespunzătoare ipotenuzei, este egală cu produsul între ipotenuza mărită cu o catetă şi cosinusul patratic al jumătăţii unghiului opus catetei.*

3°. *Raza cercului exînscris corespunzătoare unei catete, este egală cu acea catetă înmulţită cu cosinusul patratic al jumătăţii unghiului adiacent.*

Această teoremă se poate demonstra şi direct.

Observări. 1°. Dacă în relaţiile (76) înlocuim $a+b$ şi $a+c$ prin valorile lor din relaţiile (7) (No. 50), obţinem:

$$r_a = 2\, p\, cp\, \frac{B}{2}\, cp\, \frac{C}{2},$$

şi cum am găsit în (74) $r_a = p$, urmează că:

(79) $\boxed{2\, cp\, \frac{B}{2}\, cp\, \frac{C}{2} = 1}$.

2°. Din relaţiile (72) şi (73) deducem cu uşurinţă identităţile:

(80) $\boxed{\sum \frac{1}{sp\, \frac{A}{2}} = 3 + \frac{p}{r}}$,

(81) $\boxed{\frac{r_a}{r_a + p} + \frac{p-a}{r+p-a} = 1}$.

Relaţiuni într'un triunghiu, când intervin alte raze.

71. **Teoremă.** *Dacă într'un triunghiu* A B C, *ducem una din înălţimi* A D *de exemplu şi însemnăm cu* r_1, r_2 *razele cercurilor înscrise în triunghiurile* A D B *şi* A D C, *avem relaţia*

(82) $\boxed{a = \frac{r_1}{sp\, \frac{B}{2}} + \frac{r_2}{sp\, \frac{C}{2}}}$,

dacă unghiurile B *şi* C *sunt ascuţite şi relaţia*

(83) $\boxed{a = \frac{r_1}{sp\, \frac{B}{2}} - \frac{r_1}{cp\, \frac{C}{2}}}$,

dacă unghiul C *nu este ascuţit.*

Demonstraţie. 1°. Construind conform enunţului fig. 19 şi aplicând în triunghiurile dreptunghice

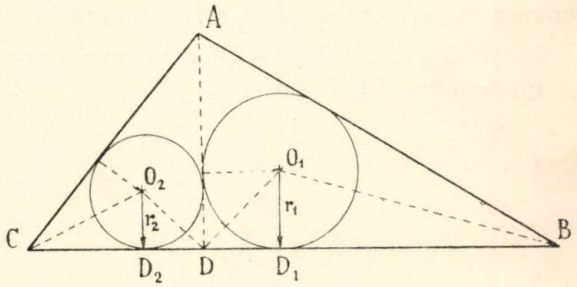


Fig. 19.

$O_1 D_1 B$ şi $O_2 D_2 C$ *teorema 1-a* (No. 49), avem:

$$r_1 = (r_1 + D_1 B)\, sp\, \frac{B}{2} = D B\, sp\, \frac{B}{2}, \qquad (r_1 = D D_1)$$

$$r_2 = (r_2 + C D_2)\, sp\, \frac{C}{2} = C D\, sp\, \frac{C}{2}, \qquad (r_2 = D_2 D).$$

De aci deducem:

$$D B = \frac{r_1}{sp\, \frac{B}{2}}, \qquad C D = \frac{r_2}{sp\, \frac{C}{2}}.$$

Adunând aceste relaţii, obţinem,

$$a = \frac{r_1}{sp\, \frac{B}{2}} + \frac{r_2}{sp\, \frac{C}{2}}$$

tocmai relaţia (82).

2°. Construim conform enunţului fig. 20 şi apli-

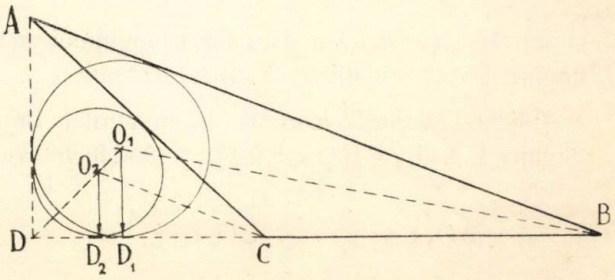


Fig. 20.

căm în triunghiurile dreptunghice O_1D_1B, O_2D_2C *teorema 1-a* (No. 49) şi avem:

$$r_1 = (r_1 + D_1B)\, sp\frac{B}{2} = DB\, sp\frac{B}{2}, \qquad (r_1 = DD_1)$$

$$r_2 = (r_2 + D_2C)\, sp\left(90^0 - \frac{C}{2}\right) = DC\, cp\frac{C}{2}, \quad (r_2 = DD_2).$$

De aci deducem:

$$DB = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}}, \qquad DC = \frac{r_2}{cp\frac{C}{2}}.$$

Scăzând aceste relaţii, obţinem:

$$a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}} - \frac{r_2}{cp\frac{C}{2}},$$

tocmai relaţia (83) din enunţ.

Relaţiuni remarcabile între unghiurile unui triunghiu.

Ne propunem a stabili unele relaţiuni între *funcţiunile patratice* ale unghiurilor unui triunghiu oarecare.

72. **Teoremă.** *Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$(84) \qquad \boxed{sp\frac{A}{2} + sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} = 1 + 2\, sp\frac{A}{2}\, sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2}}.$$

Soluţie. In adevăr, fiindcă

$$90^0 - \frac{A}{2} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2},$$

rezultă:

$$sp\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = sp\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right).$$

Dezvoltând membrul al 2-lea conform formulei de adiţiune (20) (No. 20., P. I-a), condiţiile din acea formulă fiind împlinite, avem:

$$cp\frac{A}{2} = \frac{sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} - 2\, sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2}}{1 - 2\, sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2}}.$$

sau:

$$\left(1 - sp\frac{A}{2}\right)\left(1 - 2\, sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2}\right) =$$

$$sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} - 2\, sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2}.$$

Simplificând, deducem,

$$sp\frac{A}{2} + sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} = 1 + 2\, sp\frac{B}{2}\, sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2},$$

tocmai relaţia cerută.

Altă demonstraţie. Relaţia cunoscută,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1,$$

(F. G. M., p. 586),

se mai poate scri,

$$\sum sp\frac{A}{2}\, sp\frac{B}{2}\, cp\frac{C}{2} = cp\frac{A}{2}\, cp\frac{B}{2}\, cp\frac{C}{2},$$

sau:

$$\sum sp\frac{A}{2}\, sp\frac{B}{2}\left(1 - sp\frac{C}{2}\right) =$$

$$\left(1 - sp\frac{A}{2}\right)\left(1 - sp\frac{B}{2}\right)\left(1 - sp\frac{C}{2}\right).$$

Dezvoltând calculele şi simplificând, obţinem tocmai relaţia (84).

Caz particular: $A = 90^0$. In acest caz, $sp\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ şi relaţia (84) devine:

$$\frac{1}{2} + sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} = 1 + sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2},$$

sau:

$$\frac{1}{2} + 1 - cp\frac{B}{2} + 1 - cp\frac{C}{2} =$$

$$1 + \left(1 - cp\frac{B}{2}\right)\left(1 - cp\frac{C}{2}\right).$$

De aci deducem,

$$(85) \qquad \boxed{2\, cp\frac{B}{2}\, cp\frac{C}{2} = 1},$$

relaţia (79), găsită şi pe altă cale.

Rezultă mai general ca dacă,

$$\alpha + \beta = 45^0,$$

atunci

(86) $$\boxed{2\,cp\,\alpha\,cp\,\beta = 1}\,.$$

Aplicație. Între unghiurile A, B, C ale unui triunghiu existând relația

$$\frac{A}{4} + \frac{B+C}{4} = 45^0,$$

rezultă în baza relației (86) că:

(87) $$\boxed{2\,cp\,\frac{A}{4}\,cp\,\frac{B+C}{4} = 1}\,.$$

73. **Teoremă.** *Într'un triunghiu oarecare, dacă nici unul din unghiuri nu este obtuz, avem relația*

(88) $$\boxed{cp\,A + cp\,B + cp\,C = 1 + 2\,cp\,A\,cp\,B\,cp\,C}\,.$$

iar dacă unul din unghiuri este obtuz, A *de exemplu, avem relația:*

(89) $$\boxed{sp\,A = sp\,B + sp\,C + 2\,sp\,B\,sp\,C\,cp\,A}\,.$$

Soluție. In adevăr, de oarece,

$$180^0 - A = B + C,$$

rezultă:

(90) $$-\,cp\,A = cp\,(B + C).$$

1°. A fiind ascuțit, avem

$$90^0 < B + C < 180^0$$

și putem dezvolta membrul al 2-lea a relației (90) conform formulei de adițiune (21′) (No. 20., P. I-a), astfel că obținem:

$$-\,cp\,A = \frac{1 - sp\,B - sp\,C}{1 - 2\,cp\,B\,cp\,C} = \frac{cp\,B + cp\,C - 1}{1 - 2\,cp\,B\,cp\,C}.$$

De aci deducem:

$$cp\,A + cp\,B + cp\,C = 1 + 2\,cp\,A\,cp\,B\,cp\,C,$$

adică relația (88′.

2°. Dacă A este obtuz, rezultă

$$0 < B + C < 90^0$$

și putem dezvolta membrul al 2-lea a relației (90), conform formulei de adițiune (21) (No. 20, P., I-a), astfel că avem:

(91) $$-\,cp\,A = \frac{1 - sp\,B - sp\,C}{1 - 2\,sp\,B\,sp\,C}.$$

Cum, $1 + cp\,A = sp\,A$, fiindcă $90^0 < A < 180^0$, relația (91) devine:

$$sp\,A = sp\,B + sp\,C + 2\,sp\,B\,sp\,C\,cp\,A,$$

tocmai relația cerută (89).

Altă demonstrație. 1°. Relația cunoscută,

(92) $$tg\,A + tg\,B + tg\,C = tg\,A\,tg\,B\,tg\,C,$$

(F.G.M., p. 586),

ținând seamă că unghiurile A, B, C sunt ascuțite, se mai poate scri,

$$\frac{1 - cp\,A}{cp\,A} + \frac{1 - cp\,B}{cp\,B} + \frac{1 - cp\,C}{cp\,C} = \frac{(1 - cp\,A)(1 - cp\,B)(1 - cp\,C)}{cp\,A\,cp\,B\,cp\,C},$$

sau:

$$\sum cp\,B\,cp\,C\,(1 - cp\,A) = (1 - cp\,A)(1 - cp\,B)(1 - cp\,C).$$

Dezvoltând calculele și simplificând găsim cu ușurință relația (88).

2. Aceiași relație (92), A fiind obtuz, se poate scri,

$$\frac{sp\,A}{sp\,A - 1} + \frac{sp\,B}{1 - sp\,B} + \frac{sp\,C}{1 - sp\,C} = \frac{sp\,A\,sp\,B\,sp\,C}{(sp\,A - 1)(1 - sp\,B)(1 - sp\,C)},$$

sau:

$$sp\,A\,(1 - sp\,B)(1 - sp\,C) + sp\,B\,(1 - sp\,C)(sp\,A - 1) + sp\,C\,(sp\,A - 1)(1 - sp\,B) = sp\,A\,sp\,B\,sp\,C.$$

Dezvoltând calculele și simplificând, obținem cu ușurință relația (89).

Vom trata acum câteva cazuri particulare.

1°. *Cazul* $A=90^0$. In acest caz relaţia (88) devine,

$$\boxed{cp\,B+cp\,C=1}, \tag{93}$$

de altfel evidentă, B şi C fiind complimentare.

2°. *Cazul* $A=45^0$, *iar unghiurile* B *şi* C *nu sunt obtuze.*

In acest caz relaţia (88) devine,

$$\frac{1}{2}+cp\,B+cp\,C=1+cp\,B\,cp\,C,$$

sau:

$$\frac{1}{2}+1-sp\,B+1-sp\,C=1+(1-sp\,B)(1-sp\,C).$$

De aci deducem:

$$\boxed{2\,sp\,B\,sp\,C=1}. \tag{94}$$

3°. *Cazul* $A=45^0$, *iar* B *obtuz.* In acest caz relaţia analoagă cu (89) anume,

$$sp\,B=sp\,A+sp\,C+2\,sp\,A\,sp\,C\,cp\,B,$$

devine:

$$sp\,B=\frac{1}{2}+sp\,C+sp\,C\,cp\,B=$$

$$\frac{1}{2}+sp\,C+sp\,C\,(sp\,B-1).$$

De aci deducem,

$$\boxed{2\,sp\,B\,cp\,C=1}. \tag{95}$$

4°. *Cazul* $A=135^0$. In acest caz având

$$B+C=45^0,$$

rezultă

$$\boxed{2\,cp\,B\,cp\,C=1}, \tag{96}$$

conform relaţiei (86).

Incă o relaţie între unghiurile unui triunghiu.

74. **Teoremă.** *Intr'un triunghiu oarecare avem relaţiunea remarcabilă:*

$$\boxed{sp\frac{A}{4}\,sp\frac{B}{4}\,sp\frac{C}{4}+cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B}{4}\,cp\frac{C}{4}=\frac{1}{2}}. \tag{97}$$

Soluţie. In adevăr, fiindcă

$$\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}=45^0,$$

rezultă:

$$cp\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Dezvoltând primul membru conform formulei de adiţiune (27) (No. 21, P. I-a), condiţiile fiind împlinite, avem:

$$\frac{1-sp\frac{A}{4}-sp\frac{B}{4}-sp\frac{C}{4}+2\,sp\frac{A}{4}\,sp\frac{B}{4}\,sp\frac{C}{4}}{1-2\,sp\frac{A}{4}\,sp\frac{B}{4}-2\,sp\frac{B}{4}\,sp\frac{C}{4}-2\,sp\frac{C}{4}\,sp\frac{A}{4}+4\,sp\frac{A}{4}\,sp\frac{B}{4}\,sp\frac{C}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Aducând la formă întreagă şi simplificând, avem:

$$\frac{1}{2}=\sum sp\frac{A}{4}-\sum sp\frac{A}{4}\,sp\frac{B}{4}. \tag{98}$$

Dacă acum scădem din relaţia evidentă

$$\left(1-sp\frac{A}{4}\right)\left(1-sp\frac{B}{4}\right)\left(1-sp\frac{C}{4}\right)=$$

$$cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B}{4}\,cp\frac{C}{4},$$

relaţia (98), obţinem

$$\left(1-sp\frac{A}{4}\right)\left(1-sp\frac{B}{4}\right)\left(1-sp\frac{C}{4}\right)-\frac{1}{2}=$$

$$cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B}{4}\,cp\frac{C}{4}-\sum sp\frac{A}{4}+\sum sp\frac{A}{4}\,sp\frac{B}{4}.$$

Efectuând calculele şi simplificând, găsim

$$\frac{1}{2}=\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}+cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B}{4}\,cp\frac{C}{4}.$$

tocmai relaţia cerută.

Altă metodă. Intr'un triunghiu oarecare este cunoscută relaţia:

$$(99)\quad \left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)=$$

$$2+2\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4},\quad \text{(C. de P., p. 22, Partea I-a).}$$

Dar,

$$1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}=\frac{1}{cp\,\frac{A}{4}},\qquad 1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}=\frac{1}{cp\,\frac{B}{4}},$$

$$1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}=\frac{1}{cp\,\frac{C}{4}},$$

astfel că relaţia (99) devine,

$$\frac{1}{cp\,\frac{A}{4}\,cp\,\frac{B}{4}\,cp\,\frac{C}{4}}=2+\frac{2\,sp\,\frac{A}{4}\,sp\,\frac{B}{4}\,sp\,\frac{C}{4}}{cp\,\frac{A}{4}\,cp\,\frac{B}{4}\,cp\,\frac{C}{4}},$$

sau,

$$\frac{1}{2}=cp\,\frac{A}{4}\,cp\,\frac{B}{4}\,cp\,\frac{C}{4}+sp\,\frac{A}{4}\,sp\,\frac{B}{4}\,sp\,\frac{C}{4},$$

tocmai relaţia din enunţ.

Cazuri particulare. 1°. $A=B=C=60^0$. In acest caz relaţia (97) devine:

$$(100)\quad \boxed{sp^3\,15^0+cp^3\,15^0=\frac{1}{2}}.$$

2°. $A=\frac{\pi}{2}$, $B=C=\frac{\pi}{4}$. In acest caz relaţia (97) devine:

$$(101)\quad \boxed{sp\,\frac{\pi}{8}\,sp^2\,\frac{\pi}{16}+cp\,\frac{\pi}{8}\,cp^2\,\frac{\pi}{16}=\frac{1}{2}}.$$

O clasă de identităţi.

75. Vom termina această parte a lucrării, expunând o metodă simplă pentru a obţine identităţi în care să apară *funcţiunile patratice* ce le-am studiat.

Astfel, orice relaţiune identică, în care intervine tangenta sau cotangenta unor arce sau unghiuri, se poate transpune într'o alta echivalentă, în care să apară sinusul şi cosinusul patratic al acelor arce sau unghiuri.

Vom folosi în acest scop relaţiile de transformare:

$$(102)\quad 1+\operatorname{tg}\alpha=1+\frac{sp\,\alpha}{cp\,\alpha}=\frac{1}{cp\,\alpha},\qquad \text{pentru: } 0\leq\alpha\leq 90^0.$$

$$(103)\quad 1+\operatorname{cotg}\alpha=1+\frac{cp\,\alpha}{sp\,\alpha}=\frac{1}{sp\,\alpha},$$

Pentru α înalte cadrane, folosim relaţii analoage deduse din tabloul (11) (No. 13., P. I-a).

Să tratăm câteva exemple.

1°. Dacă în identitatea cunoscută

$$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\sin a}{\cos a}=\frac{\cos a}{1+\sin a},$$

(F. G. M., p. 55)

presupunem $0\leq a\leq 90^0$ şi adunăm 1 în ambii membrii, obţinem având în vedere relaţia (102).

$$\frac{1}{cp\left(45^0-\frac{a}{2}\right)}=$$

$$\frac{1-\sin a+\cos a}{\cos a}=\frac{1+\sin a+\cos a}{1+\sin a}.$$

De aci deducem:

$$(104)\quad \boxed{cp\left(45^0-\frac{a}{2}\right)=\frac{\cos a}{1-\sin a+\cos a}=\frac{1+\sin a}{1+\sin a+\cos a}},\quad 0\leq a\leq 90^0.$$

2°. Considerăm relaţia cunoscută într'un triunghiu

$$a\operatorname{cotg}A+b\operatorname{cotg}B+c\operatorname{cotg}C=2(R+r),$$

(C. de P., p. 9)

şi presupunem că nici unul din unghiuri nu este obtuz.

Adunând'o cu relaţia identică

$$a+b+c=2p$$

şi având în vedere relaţia (103), obţinem:

$$(105)\quad \boxed{\frac{a}{sp\,A}+\frac{b}{sp\,B}+\frac{c}{sp\,C}=2(R+r+p)}\,.$$

3°. Considerăm relaţia cunoscută într'un triunghiu [1]

$$(b^2-c^2)\operatorname{cotg} A+(c^2-a^2)\operatorname{cotg} B+(a^2-b^2)\operatorname{cotg} C=0,$$

şi presupunem că nici unul din unghiuri nu este obtuz.

Adunând'o cu relaţia identică

$$(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)=0$$

şi având în vedere formula (103), obţinem:

$$(106)\qquad \frac{b^2-c^2}{sp\,A}+\frac{c^2-a^2}{sp\,B}+\frac{a^2-b^2}{sp\,C}=0.$$

4°. Relaţia cunoscută într'un triunghiu

$$a\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+b\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+c\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=2(4R+r),$$

(C. de P., p. 9)

adunată cu

$$a+b+c=2p,$$

ne dă în virtutea formulei (103):

$$(107)\quad \boxed{\frac{a}{sp\,\frac{A}{2}}+\frac{b}{sp\,\frac{B}{2}}+\frac{c}{sp\,\frac{C}{2}}=2(4R+r+p)}\,.$$

Observare. Această relaţie adunată cu (64) (No. 65) ne dă:

$$(108)\quad \boxed{\frac{p-c}{sp\,\frac{A}{2}}+\frac{p-a}{sp\,\frac{B}{2}}+\frac{p-b}{sp\,\frac{C}{2}}=4R+r+p}\,.$$

5°. Relaţiei cunoscute într'un triunghiu

$$(b-c)\operatorname{tg}\frac{A}{2}+(c-a)\operatorname{tg}\frac{B}{2}+(a-b)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$$

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{S},$$

(C. de P., p. 8)

adunându-i

$$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$$

şi având în vedere formula (102), obţinem:

$$(109)\quad \boxed{\frac{b-c}{cp\,\frac{A}{2}}+\frac{c-a}{cp\,\frac{B}{2}}+\frac{a-b}{cp\,\frac{C}{2}}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{S}}\,.$$

(Va urma: PARTEA III-A)

[1] Trigonométrie, par *F. Brachet* et *J. Dumarque*, p. 154.

NOTE MATEMATICE

1. — *Sur le système diophantien*

$$A_1^p+A_2^p+A_3^pA_4^p=B_1^p+B_2^p+B_3^p+B_4^p\quad(p=1,3).$$

A. Considérons la solution évidente

$$a^p+(-a)^p+b^p+(-b)^p=c^p+(-c)^p+$$
$$d^p+(-d)^p,\qquad (p=1,3);$$

nous en déduirons une de la forme

$$(a+t\alpha)^p+(-a+t\alpha)^p+(b+t\beta)^p+(-b+t\beta)^p=$$
$$(c+t\alpha)^p+(-c+t\alpha)^p+(d+t\beta)^p+$$
$$(-d+t\beta)^p,\qquad (p=1,3)$$

α et β satisfaisant à la condition

$$(a^2-c^2)\alpha=(d^2-b^2)\beta,$$

t étant arbitraire.

On pourra en déduire une solution paramétrique, renfermant 5 paramètres arbitraires, a, b, c, d, et t.

La relation précédente est satisfaite pour

$$\alpha=d^2-b^2,\qquad \beta=a^2-c^2;$$

on aura

$$[a+t(d^2-b^2)]^p+[-a+t(d^2-b^2)]^p+$$
$$[b+t(a^2-c^2)]^p+[-b+t(a^2-c^2)]^p=$$
$$[c+t(d^2-b^2)]^p+[-c+t(d^2-b^2)]^p+$$
$$[d+t(a^2-c^2)]^p+[-d+t(a^2-c^2)]^p,\qquad (p=1,3).$$

Exemples numériques.

1) $a=3,\ b=5,\ c=2,\ d=4,\ t=1,$

$$12^p+6^p+(-10)^p=11^p+7^p+(-1)^p+(-9)^p,$$

ou

$$1^p+6^p+9^p+12^p=7^p+10^p+11^p, \qquad (p=1,3)$$
$$S_1=28,\quad S_3=2674.$$

2) $a=3,\ b=5,\ c=2,\ d=4,\ t=2,$

$$21^p+15^p+(-5)^p+(-15)^p=20^p+16^p+(-6)^p+(-14)^p,$$

ou

$$6^p+14^p+21^p=5^p+16^p+20^p, \qquad (p=1,3)$$
$$S_1=41,\quad S_3=12221.$$

B. On peut d'ailleurs profiter de l'indétermination de t pour rendre égaux 2 termes, l'un dans le 1^{er} membre, l'autre dans le 2^d, et obtenir des solutions du système

$$A_1^p+A_2^p+A_3^p=B_1^p+B_2^p+B_3^p, \qquad (p=1,3).$$

En égalant p. ex. le premier terme du 1^{er} membre au 3^e terme du 2^d membre, on obtient l'identité multiple.

$$[Ra+(d-a)(d^2-b^2)]^p+[-Ra+(d-a)(d^2-b^2)]^p+$$
$$[Rb+(d-a)(a^2-c^2)]^p+[-Rb+(d-a)(a^2-c^2)]^p=$$
$$[Rc+(d-a)(d^2-b^2)]^p+[-Rc+(d-a)(d^2-b^2)]^p+$$
$$[Rd+(d-a)(a^2-c^2)]^p+[-Rd+(d-a)(a^2-c^2)]^p, \qquad (p=1,3),$$

R étant égal à

$$c^2+d^2-(a^2+b^2),$$

dans laquelle le 1^{er} terme du 1^{er} membre et le 3^e du 2^d peuvent être supprimés comme étant identiques.

Exemples numériques.

1) $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,$

$$8^p+(-2)^p+(-2)^p=13^p+3^p+(-12)^p, \qquad (p=1,3)$$
$$S_1=4,\qquad S_3=496.$$

On peut écrire aussi

$$8^p+12^p=2^p+2^p+3^p+13^p, \qquad (p=1,3)$$
$$S_1=20,\qquad S_3=2240.$$

2) $a=2,\ b=3,\ c=4,\ d=5,$

$$(-1)^p+6^p+(-15)^p=20^p+(-8)^p+(-22)^p, \qquad (p=1,3)$$
$$S_1=-10,\qquad S_3=-3160.$$

On a aussi

$$6^p+8^p+22^p=1^p+15^p+20^p, \qquad (d=1,3)$$
$$S_1=36,\qquad S_3=11376.$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XLIV, No. 6, Februarie 1939. † Profesorul *Gh. Țițeica,* de *V. Vâlcovici.* Câteva aplicații geometrice ale invarianților lui *Boole,* de *D. Barbelian.* Metoda electrică pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice, de Ing. *Tudor A. Tănăsescu.* O teoremă de scoborîre a ecuațiilor multigrade, de *A. Gloden.* Concursul *„Gazetei Matematice".* Note. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Știință și progres,* Revista științifică a liceelor Militare, anul V, No. 6, Februarie 1939. Viața la suprafața mărilor. Planctonul. Mările Sargasselor, de *Dr. Eugen A. Pora.* Ieftinirea radiului, de Prof. *S. Iliuț.* Fotosinteza, de Elev *Canari A. Vlad.* Mișcarea browniană și numărul lui *Avogadro,* de Prof. *Ion Lungu.* Probleme rezolvate și propuse.

3. *Numerus,* anul IV, 1938. Conține între altele: *Discours de la Methode,* conferință ținută în 1937, de † *Gh. Țițeica.* Probleme propuse la examenele de bacalaureat în 1937. O cuvântare ținută în 1936 la Congresul de la *Oslo,* de D-l *Gaston Iulia.* Problema raselor, de *Ion Armean.* Corespondență matematică, de *N. Racliș.* Rezultatul concursului *„Edouard Goursat".* † *Aurel Angelescu,* de *Cezar Cosniță.* Despre unitățile de măsură, de *Axente Creangă.* Problema celor patru culori, de *Ion Armean.* Sărbătorirea, în România, a D-lui *Paul Montel,* de *George Călugăreanu. Elementele lui Euclid,* publicate în românește, de *Niculae Racliș.* A patra dimensiune, de *Ion Armean.*

INȘTIINȚARE [1]

Domnul Director al liceului „Ion Maiorescu“ *din Giurgiu a recomandat pe elevul* Beşleagă N. Florea *din clasa VII științifică pentru a primi drept premiu pe anul 1939—1940 un abonament la* Revista Matematică din Timişoara.

Pentru acest an premiul *poartă numele* „**Traian Lalescu**“.

PROBLEME REZOLVATE

1296. — *Cu cifrele* 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 *luate câte o singură dată să se formeze două numere din care unul este patratul celuilalt.*

V. THÉBAULT

Patratul unui număr de n cifre are $2n-1$ sau $2n$ cifre. Deci cu cele 8 cifre date se poate forma un număr de 3 cifre şi unul de 5 cifre astfel ca ultimul să fie patratul primului.

Fie deci

$$(\alpha\,\beta\,\gamma)^2 = a\,b\,c\,d\,e$$

numerele căutate. Cifra α este rădăcina patrată a cifrei a. Cum $a \leqq 9$ urmează că $\alpha \leqq 3$, deci $\alpha = 1,2$ sau 3

I. $\alpha = 1$, de unde rezultă $a = 2$ sau 3. Minimul lui $a\,b\,c\,d\,e$ fiind 20346 urmează că minimul lui $\alpha\,\beta\,\gamma$ este 142. Consider deci numerele $\alpha\,\beta\,\gamma$ de la 142 la 198 din care elimin:

— pe acelea terminate în 0, 1, 6 pentru că aceste cifre se repetă în $a\,b\,c\,d\,e$.

— pe acelea ce conţin una din cifrele 5, 7.

— pe acelea terminate în 9, al căror patrat se termine cu 1.

— pe acelea ale căror unimi se termină la patrat cu una din cifrele lor, de exemplu pe 164 pentru că 164^2 se termină cu 6 care este întrebuinţat o dată.

— pe acelea care au cifre identice.

Rămân de examinat numerele din şirul

(1) 143, 162, 163, 168, 182, 183, 184, 192, 194, 198

II. $\alpha = 2$. Procedând ca la I, se găseste $203 < \alpha\beta\gamma < 298$ şi rămân de examinat numerele din şirul

(2) 203, 204, 208, 209, 213, 214, 218, 229, 238, 239, 243, 249, 263, 268, 269, 283, 284, 289, 294, 298

III. $\alpha = 3$. Se găseşte că trebue examinate numerele

(3) 302, 304, 308, 312, 314.

Observăm acum că suma cifrelor numerelor $\alpha\beta\gamma$ şi $a\,b\,c\,d\,e$ este de 33, deci aceste numere nu pot fi simultan divizibil prin 9. Rezultă că $\alpha\,\beta\,\gamma \neq$ mult. 9. Elimin din cele 3 şiruri numerele 162, 198, 234, 243, iar pe celelalte le ridicăm la patrat şi găsim că singura soluţie a problemei este

$$209^2 = 43681.$$

Notă. 1°. Au rezolvat problema pe diferite căi găsind soluţia exactă d-nii: *Amărăşteanu M., Cazanacli V. P., Hompola T., Mihalcea V. V., Săvulescu Sp.*

2°. Problema se poate rezolva fără ridicări la patrat examinând corespondenţa între terminaţiunea unui patrat şi forma rădăcinei, dată de d-l *I. V. Mătieş* în *Gazeta Matematică* Vol. XXXVII, pag. 368. De exemplu se arată acolo că dacă $a\,b\,c\,d\,e$ se termină cu 249 atunci $\alpha\,\beta\,\gamma$ este de forma $250n \pm 57$. Nu considerăm pe $250n + 57$, considerăm numai pe 193 care este cuprins în limitele ce poate avea $\alpha\,\beta\,\gamma$. Dar 193^2 se termină evident cu 9, deci nu este soluţie.

La fel, dacă $a\,b\,c\,d\,e$ se termină cu 681 atunci $\alpha\,\beta\,\gamma$ este de forma $250n \pm 41$. Se elimină $250n + 41$ pentru că se termină cu 1 şi la patrat şi la rădăcină, în schimb $250n - 41$ dă soluţia

$$209^2 = 43681.$$

Soluţia pe această cale evită ridicarea la patrat a multor numere, dar cere să se dispună de vol. XXXVII din *Gazeta Matematică*, care nu poate fi la îndemână tuturor.

G-l Gh. B.

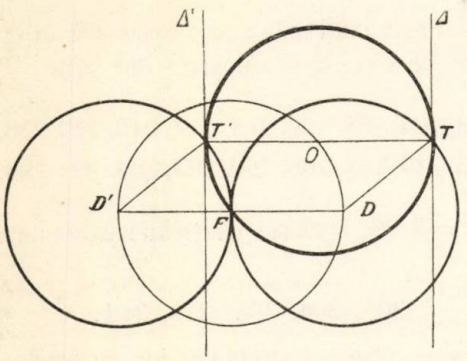
1525. — *Un cerc de rază constantă se mişcă într'un plan dat în jurul unui punct fix al său. Se cere să se găsească locul geometric al punctului de tangenţă al cercului cu o tangentă de direcţie dată.*

G-L GH BUICILU

[1]) A se vedea publicaţia din „R. M. T.“, anul XVII, No. 9, pag. 100.

Fie O centrul cercului din enunț; F punctul fix prin care trece necontenit; Δ, Δ' și T, T' tangentele de direcție dată și punctele de tangență.

Centrul O al cercului, descrie un cerc (F) cu centrul



în F și cu raza F O. Notez cu D, D' extremitățile diametrului lui (F) perpendicular pe Δ, Δ'.

Patrulaterele F O T D, F O T' D' având laturile F D, O T, respectiv F D', O T' egale și paralele sunt paralelograme deci D T și D' T' sunt egale și paralele cu F O. Cum D și D' sunt fixe rezultă că locul cerut se compune din două cercuri (D), (D') cu centrele în D, D' și cu razele egale cu raza cercului (O).

Au rezolvat foarte bine problema pe această cale d-nii: *Apostol R.* (lic. Milit, Târgoviște), *Ripianu A., Zagaican I.* (Conductor L. P, Leova) și *Tilică C. Ștefan* (lic. T-Severin).

D-nii: *Florescu V., Negulescu A. St.* (lic. Milit., Târgoviște), au găsit ca loc numai unul din cercurile (D), (D').

PROBLEME PROPUSE

1752. — Să se afle patratele de forma $a\,a\,b\,c\,d$ în care $a\,c\,d$ este patrat perfect, iar $b + c = a$.

SUB LT CORNELIU LUPESCU

1753. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre care înmulțit cu 9 să se reproducă la produs răsturnat și tot patrat perfect.

IONEL I. STAMATE

1754. — In triunghiul A B C, perpendicularele în A pe A C și în B pe A B se întâlnesc în B'. Analog se obține C'. Să se arate că:

1°. Punctele B', C' sunt simetrice față de centrul O al cercului circumscris triunghiului A B C.

2°. Dreapta B' C' trece prin intersecția cu B C a tangentei în A la cercul A B C.

N. N. MIHAILEANU

1755. — Fie D piciorul bisectoarei unghiului A în triunghiul A B C, I centrul cercului înscris, A' mijlocul lui B C și D E a doua tangentă dusă din D la cercul I.

Să se demonstreze că A' E este perpendiculară pe tangenta în A la cercul A B C și să se deducă locul punctului lui *Feuerbach* al triunghiului A B C când B C este fixă și unghiul A constant.

G-L GH. BUICLIU

1756. — Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{x}-3}{x+3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{x}+3}{x-3}=\operatorname{arc\,tg}\frac{287\,x}{54\,(18-4\,x\sqrt{x})}.$$

C-TIN I. JIDANU

1757. — Să se arate că:

$$2\,\frac{\operatorname{tg}2a+\operatorname{tg}2b-\operatorname{cotg}2a-\operatorname{cotg}2b}{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b-\operatorname{cotg}a-\operatorname{cotg}b}=1-\operatorname{tg}2a\operatorname{tg}2b.$$

LT. C. D. IONESCU-ȚIU

1758. — Să se rezolve ecuația:

$$sp^4x+cp^4x=\frac{1}{8}.$$

V. ALACI

1759. — Fie M și N două nave care se găsesc în două puncte A și B. Nava M urmează un drum constant. Viteza acestei nave la început este V_{m_1}; după timpul t_1, nava are viteza V_{m_2}. Nava N dispune de viteza V_n. Se cere drumul navei N, astfel ca să întâlnească pe M în timp minim. (Drumul de goană).

LT. C COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakony C. (1648, 1680); *Borneas Marius* (1638, 1678, 1737, 1746, 1749, 1751); *Checian N. Ana* (1647, 1688, 1751); *Ciceiu Cetate* (1681, 1707); *Constantinescu N. Virgil* (1508); *Cristea I. C-tin* (1746); *Cristea I. Nicolae* (1413, 1691, 1692, 1693, 1745); *Dăscălescu Şt. Hristache* (P., 1654, 1656, 1684, 1717, 1725, 1729, 1733, 1734, 1736, 1741); *Doscan Gh. Alexandru* (1608, 1683, 1720); *Gligor N. Ioan* (1665, 1746, 1751); *Hermann I. Carol* (1674, 1697, 1726, 1727, 1729, 1730, 1746); *Jidanu I. C-tin* (1272, 1325, 1402, 1405, 1677, 1727, 1729, 1746, 1751); *Luca I. Ioan* (1638, 1664, 1674, 1690, 1692, 1704, 1707, 1751); *Manolache Elena* (1272, 1325, 1402, 1405, 1633, 1690, 1727); *Mihăileanu C. Andreiu* 1638, 1657, 1664, 1688, 1692, 1693, 1703, 1746, 1751); *Mironescu I. D-tru* (1664, 1683, 1688, 1693, 1746, 1751); *Mureşan Octavian* (1638); *Săruleşteanu I. Emanoil* (382); *Slavov Iacob* (1744, 1745, 1746, 1751); *Spataru Alexandru* (1692, 1726, 1727, 1729, 1730, 1733); *Stamate I. Ionel* (1501, 1581, 1583, 1597, 1630, 1667, 1720, 1729, 1734, 1736, 1743, 1746, 1751); *Tătaru Alexandru* (1688, 1745, 1746, 1751); *Topalescu S. Gheorghe* (1664, 1683, 1688, 1693, 1702, 1746); *Ventes D-tru* (P., 1579, 1580, 1633, 1638, 1697, 1719, 1745, 1751).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a inceput în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.
2. *Eugen Grabovschi,* Orhei - Basarabia, Strada I. C. Brătianu 14.
3. *Ştefan Musta*, profesor, Beiuş - Bihor Str. Pavel 4.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry,* sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVIII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XIX, care a început la 15 Martie 1939.

ANUL XIX 15 APRILIE 1939 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. NOTE MATEMATICE: 2, 3.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1290.
5. PROBLEME PROPUSE: 1760-1767.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208. sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XIX - NO. 2 TIMISOARA, 15 APRILIE 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

DE
V. ALACI
PROFESOR

(urmare)

PARTEA III-a.

APLICAŢIUNI ŞI PROBLEME RELATIVE LA REZOLVIREA TRIUNGHIURILOR.

76. In această parte a lucrării vom trata diferite aplicaţiuni şi probleme relative la rezolvirea triunghiurilor prin metodele *Trigonometriei patratice,* metode care în multe cazuri permit a obţine soluţiuni mai simple de cât acelea ce se obţin obicinuit numai prin metodele *Trigonometriei circulare.*

Uneori vom folosi şi *metode mixte,* adică în aceiaşi chestiune vom face să figureze simultan atât *funcţiunile patratice* cât şi cele *circulare,* unele neexcluzând pe celelalte, cum am văzut de altfel şi în partea II-a a lucrării.

Rămâne ca aplicaţiunile şi problemele aci tratate, precum şi acelea ce le aştept de la acei ce se vor ocupa cu astfel de chestiuni, să precizeze cu timpul, tot mai lămurit, întinderea domeniului în care pot fi folosite *funcţiunile patratice.*

Expresiuni logaritmice.

77. *Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile.*

1. $\sin a + \cos a$;
2. $1+\sin a+\cos a$;
3. $1+\sin a-\cos a$;
4. $1+\sin a+\cos a+\operatorname{tg} a$;

$0 \leqq a \leqq 90^0$.

(C. de P., p. 28, Partea I-a).

Soluţii. 1. Din relaţiile

$$sp\, a = \frac{\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a} = \frac{\sin a}{\sin a + \cos a},$$

$$cp\, a = \frac{1}{1+\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{\sin a + \cos a},$$

deducem:

$$(1) \qquad \boxed{\sin a + \cos a = \frac{\sin a}{sp\, a} = \frac{\cos a}{cp\, a}}.$$

2. şi 3. Considerăm relaţiile cunoscute

$$sp\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}}, \quad cp\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}}.$$

Inmulţind termenii fracţiilor respectiv cu $2\cos\frac{a}{2}$, $2\sin\frac{a}{2}$ şi ţinând seamă că,

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a, \quad 2\cos^2\frac{a}{2} = 1+\cos a,$$

$$2\sin^2\frac{a}{2} = 1-\cos a,$$

obţinem:

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\sin a+\cos a}, \quad \cos\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\sin a-\cos a}.$$

Rezultă de aci:

$$(2) \qquad \boxed{1+\sin a+\cos a = \frac{\sin a}{sp\frac{a}{2}}},$$

$$(3) \qquad \boxed{1+\sin a-\cos a = \frac{\sin a}{cp\frac{a}{2}}}.$$

4. Având în vedere relaţia (1), putem scri:

$$1+\sin a+\cos a+\operatorname{tg} a = (1+\operatorname{tg} a)+$$

$$(\sin a+\cos a) = \frac{1}{cp\, a} + \frac{\cos a}{cp\, a}.$$

De aci deducem:

$$(4)\qquad \boxed{1+\sin a+\cos a+\operatorname{tg} a=\frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{cp\,a}}\,.$$

Consecinţă. Relaţiile (2) şi (3) ridicate la patrat ne dau:

$$(5)\qquad \boxed{(1+\sin a)(1+\cos a)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin a}{sp\frac{a}{2}}\right)^2}\,,$$

$$\boxed{(1+\sin a)(1-\cos a)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin a}{cp\frac{a}{2}}\right)^2}\,.$$

Observare. Formulele calculabile prin logaritmi (1), (2) şi (3) se pot stăbili geometric astfel:

Fie triunghiul isoscel A O B (fig. 21) în care

$$\widehat{AOB}=a,\qquad \overline{OA}=\overline{OB}=1,\qquad 0\leqq a\leqq 90^0).$$

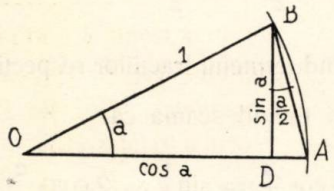


Fig. 21.

Ducem înălţimea D B şi observăm că

$$\widehat{DBA}=\frac{a}{2},\qquad \overline{OD}=\cos a,$$

$$\overline{DB}=\sin a,\qquad DA=1-\cos a.$$

Acum în triunghiul dreptunghic D O B conform *teoremei* 1ª (No. 49, P. IIª) şi a *teoremei* 2ª (No. 50, P. IIª) avem respectiv:

$$\sin a=(\sin a+\cos a)\,sp\,a,\qquad \cos a=(\sin a+\cos a)\,cp\,a,$$

şi

$$\sin a=(1+\sin a+\cos a)\,sp\frac{a}{2}\,.$$

De aci deducem

$$\sin a+\cos a=\frac{\sin a}{sp\,a}=\frac{\cos a}{cp\,a},$$

$$1+\sin a+\cos a=\frac{\sin a}{sp\frac{a}{2}},$$

adică formulele (1) şi (2) de mai sus.

Pentru a stabili formula (3), considerăm triunghiul dreptunghic D A B şi aplicăm teorema 1ª (No. 49, P. IIª), avem:

$$\sin a=(\sin a+1-\cos a)\,cp\frac{a}{2},$$

deci

$$1+\sin a-\cos a=\frac{\sin a}{cp\frac{a}{2}},$$

care este formula (3).

78. *Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile.*

1. $sp\,a-sp\,b$; 2. $sp\,a+sp\,b-sp\,(a+b)$;

3. $1-2\,sp\,a\,sp\,b$;

ştiind că, $0\leqq a,\ b,\ a+b\leqq 90^0$.

Soluţii: 1. Avem succesiv,

$$sp\,a-sp\,b=\frac{\sin a}{\sin a+\cos a}-\frac{\sin b}{\sin b+\cos b}=$$

$$\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{(\sin a+\cos a)(\sin b+\cos b)},$$

sau:

$$(6)\qquad \boxed{sp\,a-sp\,b=\frac{\sin(a-b)}{2\sin(45^0+a)\sin(45^0+b)}}\,.$$

Caz particular. Pentru $a=\frac{\pi}{2}-x$, $b=x$, relaţia (6) devine,

$$cp\,x-sp\,x=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2\sin^2(45^0+x)}=$$

$$\frac{2\sin(45^0-x)\cos(45-x)}{2\cos^2(45^0-x)},$$

sau:

$$(7)\qquad \boxed{cp\,x-sp\,x=\operatorname{tg}(45^0-x)}$$

2. Din formula de adiţiune (20), (No. 20, P. Iª), anume,

$$sp\,(a+b)=\frac{sp\,a+sp\,b-2\,sp\,a\,sp\,b}{1-2\,sp\,a\,sp\,b},$$

deducem:

$$(8)\qquad \boxed{sp\,a+sp\,b-sp\,(a+b)=2\,sp\,a\,sp\,b\,cp\,(a+b)}\,.$$

Caz particular. Pentru $a=b=x$, relaţia (8) devine

$$(9)\qquad \boxed{2\,sp\,x-sp\,2x=2\,sp^2\,x\,cp\,2x}\,.$$

3. Putem scri evident:

$$(10)\quad 1-2\,sp\,a\,sp\,b=1-2\frac{\sin a}{\sin a+\cos a}\cdot\frac{\sin b}{\sin b+\cos b}=$$

$$\frac{(\sin a\cos b+\sin b\cos a)+(\cos a\cos b-\sin a\sin b)}{(\sin a+\cos a)(\sin b+\cos b)}$$

$$=\frac{\sin(a+b)+\cos(a+b)}{2\sin(45^0+a)\sin(45^0+b)}.$$

Ţinând seamă insă că

$$sp\,(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\sin(a+b)+\cos(a+b)},$$

relaţia (10) devine:

$$(11)\quad \boxed{1-2\,sp\,a\,sp\,b=\frac{\sin(a+b)}{2\,sp\,(a+b)\sin(45^0+a)\sin(45^0+b)}}$$

Caz particular. Pentru $a=x$, $b=\frac{\pi}{2}-x$, relaţia (11) devine,

$$1-2\,sp\,x\,cp\,x=\frac{1}{2\sin^2(45^0+x)}=$$

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin^2 x},$$

sau:

$$(12)\quad \boxed{1-2\,sp\,x\,cp\,x=\left(\frac{sp\,x}{\sin x}\right)^2}.$$

Construcţii grafice.

79. *Să se construiască unghiurile x, y, z, date de relaţiile:*

1. $sp\,x=\frac{a}{b}$; 2. $sp\,y=\frac{b-a}{b+a}$;

3. $sp\,z=\frac{a}{a+\sqrt{b^2-a^2}}$; $(a<b)$.

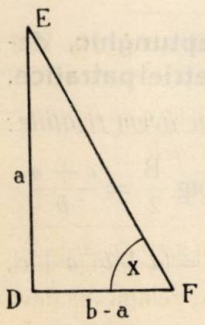


Fig. 22.

Soluţii: 1. Prima relaţie se mai poate scri

$$a=[a+(b-a)]\,sp\,x.$$

Astfel construind un triunghiu dreptunghic DEF (fig. 22) de catete $DE=a$, $DF=b-a$, urmează:

$$\boxed{\widehat{DFE}=x}.$$

In adevăr, în triunghiul dreptunghic DEF, conform *teoremei 1ª*, (No. 49, P. IIª), avem:

$$a=[a+(b-a)]\,sp\,x.$$

2 Din relaţia 2. din enunţ deducem

$$b-a=[(b-a)+2a]\,sp\,y,$$

astfel construind un triunghiu dreptunghic DEF de catete $DE=b-a$, $DF=2a$, avem

$$\boxed{\widehat{DFE}=y}.$$

Aceiaşi motivare ca mai sus.

3. Din relaţia 3. din enunţ rezultă

$$(13)\quad a=(a+\sqrt{b^2-a^2})\,sp\,z.$$

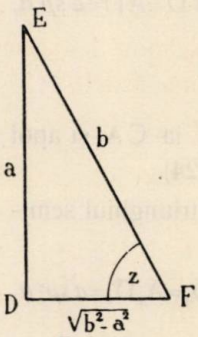


Fig. 23.

Astfel construind triunghiul dreptunghic DEF (fig. 23), având cateta $DE=a$ şi ipotenuza $EF=b$, rezultă:

$$\boxed{\widehat{DFE}=z}.$$

In adevăr, în triunghiul dreptunghic DEF, $DF=\sqrt{b^2-a^2}$, iar *teorema 1* (No. 49, P. IIª) ne dă tocmai relaţia (13).

80. *Să se construiască expresiile:*

1. $x_1=a\,sp\,\alpha$; 2. $x_2=a\,sp^2\alpha$;

3. $x_3=a\,sp^3\alpha$; .... $(0\leqq\alpha\leqq 90^0)$.

Soluţii. 1 Construim triunghiul semidreptunghic ABC, $(B=45^0)$, având $BC=a$, $C=\hat{\alpha}$ şi ducem înălţimea $AD=h_a$, (fig. 24).

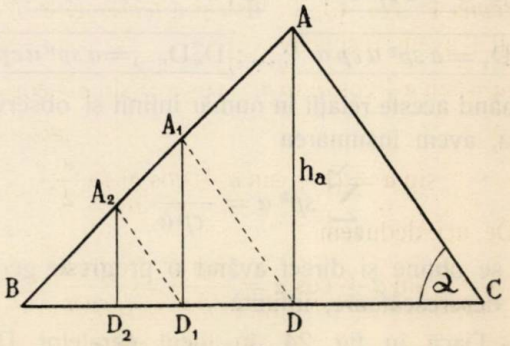


Fig. 24.

In triunghiul dreptunghic ADC, conform *teoremei 1ª*, (No. 49, P. IIª), avem

(14) $AD=(AD+DC)\,sp\,\alpha=a\,sp\,\alpha$, fiindcă: $AD=DB$, deci:

$$\boxed{x_1 = AD}.$$

Observare. Relaţia (14) ne permite a enunţa teorema:

Teoremă. *Intr'un triunghiu semidreptunghic* ABC, $(B=45^0)$ *în care unghiul* C *nu este obtuz, avem:*

(15) $$\boxed{h_a = a\,sp\,C}.$$

2. Ducem din D paralela DA_1 la CA şi apoi perpendiculara A_1D_1 pe BC, (fig. 24).

In triunghiul semidreptunghic A_1BD, conform relaţiei (15), avem

$A_1D_1=BD\,sp\,\alpha=a\,sp^2\,\alpha$, fiindcă: $BD=AD=a\,sp\,\alpha$, deci:

$$\boxed{x_2 = A_1D_1}.$$

3. Din D_1 ducem paralela D_1A_2 la CA şi apoi perpendiculara A_2D_2 pe BC, (fig. 24).

Conform teoremei de mai sus, în triunghiul semidreptunghic A_2BD_1, avem

$A_2D_2=BD_1\,sp\,\alpha=a\,sp^3\,\alpha$, fiindcă: $BD_1=A_1D_1=a\,sp^2\,\alpha$, deci:

$$\boxed{x_3 = A_2D_2}.$$

4. Prin acest procedeu simplu, repetat, găsim în general:

$$\boxed{x_n = A_{n-1}D_{n-1} = a\,sp^n\,\alpha}.$$

Observări. 1°. Din figura 24 deducem încă cu uşurinţă:

$$\boxed{DC = a\,cp\,\alpha};\qquad \boxed{D_1D = a\,sp\,\alpha\,cp\,\alpha};$$

$$\boxed{D_2D_1 = a\,sp^2\,\alpha\,cp\,\alpha};\ \ldots;\ \boxed{D_nD_{n-1} = a\,sp^n\,\alpha\,cp\,\alpha}.$$

Adunând aceste relaţii în număr infinit şi observând figura, avem însumarea

$$\sum_{k=o}^{\infty} sp^k\,\alpha = \frac{1}{cp\,\alpha},$$

care se obţine şi direct având o progresie geometrica descrescătoare, infinită.

2°. Dacă în fig. 24, în locul paralelor DA_1, D_1A_2, ... la CA, ducem pe DA_1, D_1A_2, ... astfel ca să formeze cu CB unghiurile ascuţite $\beta, \gamma \ldots \lambda$, atunci pentru perpendiculara $A_{n-1}D_{n-1} = x_n$, avem:

(16) $$\boxed{x_n = A_{n-1}D_{n-1} = a\,sp\,\alpha\,sp\,\beta\,sp\,\gamma\ldots sp\,\lambda}.$$

81. *Cunoscând unghiul* a, *să se construiască unghiul* x *definit de relaţia:*

$$sp\,x = 2\sin^2\frac{a}{2}, \qquad 0 \leqq a \leqq 90^0.$$

Soluţie. Putem scri,

$$1 - sp\,x = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

sau:

$$cp\,x = \cos a.$$

Construim deci *cercul trigonometric* O în care înscrim *patratul trigonometric* $ABA'B'$, fig. 25.

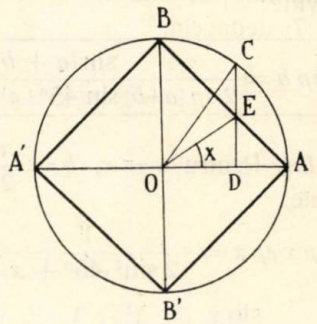


Fig. 25.

Ducem raza OC astfel ca

$$\widehat{AOC} = a.$$

şi perpendiculara CD pe OA, avem

$$OD = \cos a.$$

Unim apoi E, punctul unde CD şi AB se întâlnesc, cu O şi avem:

$$OD = cp\,\widehat{AOE}.$$

Rezultă,

$$cp\,\widehat{AOE} = \cos a,$$

deci:

$$\boxed{x = \widehat{AOE}}.$$

Relaţiuni intr'un triunghiu dreptunghic, demonstrate cu ajutorul trigonometriei patratice.

82. *In orice triunghiu dreptunghic avem relaţiile:*

1. $\operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}$; 2. $\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{c+a}{b}$.

3. $a = \frac{p}{\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$; 4. $2r_a^2 = (a+b)(a+c)$.

(C. de P., p. 1.)

Soluţii. 1. Conform relaţiei (7), (No. 78),

$$(17)\qquad \operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{B}{2}\right)=\left(cp\frac{B}{2}-sp\frac{B}{2}\right)^2=$$

$$1-4\,sp\frac{B}{2}\,cp\frac{B}{2}=1-\frac{2\,sp\frac{B}{2}}{cp\frac{C}{2}},$$

fiindcă,

$$2\,cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}=1.\quad\text{[Relaţia (85), No. 72, P. II}^a\text{].}$$

De altă parte din *teorema II*^{a} (No. 50, P. II^a), relaţiile (5) şi (7) deducem,

$$(18)\qquad 2\,sp\frac{B}{2}=\frac{b}{p},\qquad cp\frac{C}{2}=\frac{a+b}{2p},$$

astfel că relaţia (17) devine,

$$\operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{B}{2}\right)=1-\frac{b}{p}\cdot\frac{2p}{a+b}=\frac{a-b}{a+b},$$

tocmai relaţia 1.

2. Putem scri:

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{1}{sp\frac{B}{2}}-1.$$

Având în vedere relaţia (18), rezultă

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=\frac{2p}{b}-1=\frac{a+c}{b},$$

tocmai relaţia din enunţ.

3. Fiindcă,

$$\frac{C}{2}=45^0-\frac{B}{2}$$

putem scri succesiv având în vedere şi relaţia (2), (No. 77):

$$(19)\qquad \sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{B}{2}\left(\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(1+\sin B+\cos B)=\frac{\sin B}{2\,sp\frac{B}{2}}\cdot$$

Dar,

$$\sin B=\frac{b}{a},\qquad 2\,sp\frac{B}{2}=\frac{b}{p},$$

astfel că relaţia (19) devine:

$$\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{p}{b}=\frac{p}{a},$$

care sub o altă formă este tocmai relaţia 3.

4. Relaţiile (76), (No. 70, P. II^a) anume

$$r_a=(a+b)\,cp\frac{B}{2}=(a+c)\,cp\frac{C}{2},$$

înmulţite ne dau:

$$r_a^2=(a+b)(a+c)\,cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}\cdot$$

De altă parte, relaţia (85) (No. 72, P. II^a) stabileşte că,

$$cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cdot$$

Rezultă atunci,

$$2\,r_a^2=(a+b)(a+c),$$

care este relaţia 4.

Probleme relative la triunghiurile dreptunghice, rezolvate cu ajutorul trigonometriei patratice.

83. *Să se calculeze unghiurile unui triunghiu dreptunghic în care avem:*

$$a+b=3\,c,\qquad\text{(C. de. P., p. 3).}$$

Soluţie. Relaţia dată se mai poate scri

$$(20)\qquad 2\,p=4\,c.$$

Dar într'un triunghiu dreptunghic,

$$c=2\,p\,sp\frac{C}{2},$$

astfel că relaţia (20) ne dă:

$$sp\frac{C}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Folosind acum tabela 1 (No. 17, P. I) ce cuprinde valorile naturale ale *sinusurilor patratice*, avem:

$$0{,}24889\ \ldots\ldots\ 18^0,\ 20'$$

$$0{,}25\ \ldots\ldots\ \frac{C}{2}$$

$$0{,}25071\ \ldots\ldots\ 18^0,\ 30'$$

De aci deducem:

$$\frac{C}{2}=18^0,\ 20'+\left(\frac{111\times10}{182}\right)'=18^0,\ 26',\ 5'',\ 9.$$

Rezultă,

$$\boxed{C = 36^0, 52', 12''}, \quad \text{deci:} \quad \boxed{B = 53^0, 7', 48''}.$$

84. *Se dă:*

$$b = m^2 - n^2, \qquad c = 2mn.$$

Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ *şi* $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ *în funcţie de* m *şi* n. (C. de P., p 3.)

Soluţie. Avem întâi,

$$a^2 = b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

deci:

$$a = m^2 + n^2.$$

De altă parte ştim că,

$$(21) \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{cp\frac{B}{2}} - 1, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{cp\frac{C}{2}} - 1$$

şi cum din formulele (7), (No. 50, P. II^a), scoatem

$$\frac{1}{cp\frac{B}{2}} = \frac{2p}{a+c}, \qquad \frac{1}{cp\frac{C}{2}} = \frac{2p}{a+b},$$

relaţiile (21) devin:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{2p}{a+c} - 1 = \frac{b}{a+c} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2 + 2mn},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{2p}{a+b} - 1 = \frac{c}{a+b} = \frac{2mn}{m^2 + n^2 + m^2 - n^2}.$$

Simplificând, găsim:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{m-n}{m+n}}, \qquad \boxed{\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{n}{m}}.$$

85. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscând unghiul* B *şi diferenţa* $b - c = d$. (C. de P., p. 4.)

Soluţie. Conform *teoremei* 4 de la triunghiurile dreptunghice (No. 52, P. II^a), avem:

$$b - c = 2b\, sp(45^0 - C), \qquad (b > c)$$

şi cum,

$$45^0 - C = B - 45^0,$$

rezultă ţinând seamă de relaţia din enunţ:

$$\boxed{b = \frac{d}{2\, sp(B - 45^0)}}.$$

Celelalte elemente sunt acum uşor de aflat.

86. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscând ipotenuza* a *şi suma* $b + c = l$ *a catetelor. Discuţie.* (F. G. M, p. 262.)

Soluţie. Din *teorema 2* de la triunghiurile dreptunghice, formulele (7), (No. 50, P. II^a), deducem:

$$\frac{a+b}{cp\frac{C}{2}} = \frac{a+c}{cp\frac{B}{2}} = 2p.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor şi ţinând seamă de enunţ, putem scri,

$$\frac{l + 2a}{cp\frac{B}{2} + cp\frac{C}{2}} = 2p = l + a,$$

de unde:

$$(22) \qquad cp\frac{B}{2} + cp\frac{C}{2} = \frac{l + 2a}{l + a}.$$

De altă parte din formula (85) (No. 72, P. II^a), avem:

$$(23) \qquad cp\frac{B}{2}\, cp\frac{C}{2} = \frac{1}{2}.$$

Relaţiile (22) şi (23) ne permit a forma ecuaţia,

$$x^2 - \frac{l + 2a}{l + a}x + \frac{1}{2} = 0,$$

sau,

$$(24) \quad 2(l + a)x^2 - 2(l + 2a)x + l + a = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt $cp\frac{B}{2}$, $cp\frac{C}{2}$.

Aflăm astfel unghiurile B şi C şi în urmă catetele b şi c.

Discuţie. Realizantul ecuaţiei (24) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică:

$$(l + 2a)^2 - 2(l + a)^2 \geqq 0.$$

Simplificând şi ţinând seamă că $l > a$, găsim condiţia:

$$a < l \leqq a\sqrt{2}.$$

87. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscând perimetrul şi înălţimea vârfului* A. *Discuţie.* (C. de P., p. 4.)

Soluţie. Teorema 2^a, (No. 50, P. II^a) ne dă:

$$\frac{b}{sp\frac{B}{2}} = \frac{c}{sp\frac{C}{2}} = \frac{2p}{1} = \frac{a}{1 - sp\frac{B}{2} - sp\frac{C}{2}}.$$

Inmulţind primele două rapoarte şi ţinând seamă că

$$b\,c = a\,h,$$

(h înălţimea dată), avem:

$$\begin{cases} \dfrac{a\,h}{sp\dfrac{B}{2}\,sp\dfrac{C}{2}} = 4\,p^2, \\ \dfrac{a}{1 - sp\dfrac{B}{2} - sp\dfrac{C}{2}} = 2\,p. \end{cases}$$

Prin împărţire deducem:

$$(25) \qquad \frac{1 - sp\dfrac{B}{2} - sp\dfrac{C}{2}}{sp\dfrac{B}{2}\,sp\dfrac{C}{2}} = \frac{2\,p}{h}.$$

De altă parte relaţia (84) (No. 72, P. II^a) stabilită între unghiurile unui triunghiu oarecare, devine în cazul triunghiului dreptunghic,

$$(26) \qquad \frac{1}{2} - sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2} = 1 - sp\frac{B}{2} - sp\frac{C}{2},$$

astfel că relaţia (25) ne dă:

$$\frac{\dfrac{1}{2} - sp\dfrac{B}{2}\,sp\dfrac{C}{2}}{sp\dfrac{B}{2}\,sp\dfrac{C}{2}} = \frac{2\,p}{h}.$$

De aci scoatem,

$$(27) \qquad sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2} = \frac{h}{2\,(h + 2\,p)},$$

şi atunci din relaţia (26) deducem:

$$(28 \qquad sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{h}{2\,(h + 2\,p)} = \frac{h + p}{h + 2\,p}.$$

Relaţiile (27) şi (28) ne permit a forma ecuaţia

$$x^2 - \frac{h + p}{h + 2\,p}\,x + \frac{h}{2\,(h + 2\,p)} = 0,$$

sau,

$$(29) \qquad 2\,(h + 2\,p)\,x^2 - 2\,(h + p)\,x + h = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt $sp\dfrac{B}{2}$, $\dfrac{C}{2}$.

Aflăm astfel unghiurile B şi C şi în urmă catetele, date de relaţiile:

$$\boxed{b = 2\,p\,sp\frac{B}{2}}, \qquad \boxed{c = 2\,p\,sp\frac{C}{2}}.$$

Discuţie. Realizantul ecuaţiei (29) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică:

$$p^2 - 2\,h\,p - h^2 \geqq 0$$

şi $h > 0$. Rezultă de aci condiţia

$$0 < h \leqq p\,(\sqrt{2} - 1).$$

88. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscând perimetrul $2\,p$ şi unul din unghiurile ascuţite* B. (F. G. M, p. 644.)

Soluţie. Teorema 2^a, (No. 50, P. II^a) de la triunghiurile dreptunghice ne dă imediat:

$$\boxed{b = 2\,p\,sp\frac{B}{2}}, \qquad \boxed{c = 2\,p\,sp\left(45^0 - \frac{B}{2}\right)}.$$

Celelalte elemente se află cu uşurinţă.

89. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscând perimetrul $2\,p$ şi suprafaţa s^2. Discuţie.*

Soluţie. Din *teorema 2^a*, (No. 50, P. II) de la triunghiurile dreptunghice, avem:

$$(30) \qquad b = 2\,p\,sp\frac{B}{2}, \qquad c = 2\,p\,sp\frac{C}{2}.$$

Inmulţind aceste relaţii şi ţinând seamă că,

$$b\,c = 2\,s^2,$$

deducem:

$$(31) \qquad sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2} = \frac{s^2}{2\,p^2}.$$

De altă parte relaţia (84) (No. 72, P. II^a) stabilită între unghiurile unui triunghiu oarecare, devine în cazul triunghiului dreptunghic:

$$sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} - sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2} = \frac{1}{2}.$$

De aci scoatem, ţinând seamă de relaţia (31):

$$(32) \qquad sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} = \frac{p^2 + s^2}{2\,p^2}.$$

Relaţiile (31) şi (32) ne permit a forma ecuaţia

$$x^2 - \frac{p^2 + s^2}{2\,p^2}\,x + \frac{s^2}{2\,p^2} = 0,$$

sau:

$$(33) \qquad 2\,p^2\,x^2 - (p^2 + s^2)\,x + s^2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$\boxed{sp\frac{B}{2}, sp\frac{C}{2} = \frac{p^2 + s^2 \pm \sqrt{p^4 + s^4 - 6\,p^2\,s^2}}{4\,p^2}}$$

Aceste valori introduse în relaţiile (30), ne dau:

$$\boxed{b, c = \frac{p^2 + s^2 \pm \sqrt{p^4 + s^4 - 6p^2 s^2}}{2p}} .$$

Apoi,

$$a = 2p - (b + c) = 2p - \frac{p^2 + s^2}{p},$$

de unde:

$$\boxed{a = \frac{p^2 - s^2}{p}} .$$

Discuţie. O condiţie necesară este:

$$\left(\frac{p^2}{s^2}\right)^2 - 6\frac{p^2}{s^2} + 1 \geqq 0.$$

De aci şi din faptul că trebuie ca $p > s$ cum reiasă din expresia lui a, deducem:

$$\frac{p^2}{s^2} \geqq 3 + \sqrt{8},$$

sau:

$$p \geqq (1 + \sqrt{2})\, s .$$

90. *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic în care se cunoaşte perimetrul 2 p şi lungimea l a bisectoarei unghiului drept. Discuţie.*

Soluţie. Ducem bisectoarea $AD = l$ a unghiului drept şi triunghiului semidreptunghic ADB (fig. 26) îi aplicăm *teorema* 1ª, (No. 54., P. IIª), iar triunghiului dreptunghic ABC îi aplicăm *teorema* 2ª, (No. 50, P. IIª) şi avem:

$$l = c\sqrt{2}\ sp\,B , \qquad c = 2p\ sp\frac{C}{2}$$

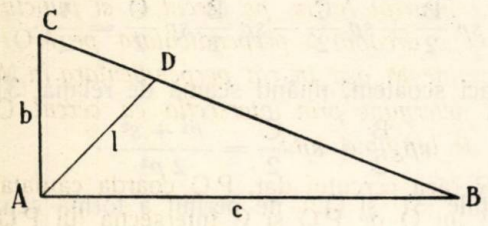


Fig. 26.

Eliminând pe c obţinem:

$$l = 2p\sqrt{2}\ sp\,B\ sp\frac{C}{2} .$$

Dar,

$$sp\,B = cp\,C = \frac{1 - 2\,sp\frac{C}{2}}{1 - 2\,sp^2\frac{C}{2}} ,$$

conform formulei de înmulţire (29), (No. 22, P. Iª), astfel că:

$$l = 2p\sqrt{2}\ \frac{sp\frac{C}{2}\left(1 - 2\,sp\frac{C}{2}\right)}{1 - 2\,sp^2\frac{C}{2}},$$

sau:

$$(34)\quad 2\left(2p\sqrt{2} - l\right) sp^2\frac{C}{2} - 2p\sqrt{2}\,sp\frac{C}{2} + l = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie găsim unghiul C, apoi celelalte elemente sunt uşor de aflat.

Discuţie. Realizantul ecuaţiei (34) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică:

$$p^2 - 2\sqrt{2}\,l\,p + l^2 > 0 ,$$

De aci deducem, ţinând seamă că $p > l$ numai condiţia:

$$p \geqq l(\sqrt{2} + 1) .$$

91. *In triunghiul dreptunghic* ABC *se cunoaşte unghiul* B *şi bisectoarea* $AD = l$. *Să se afle laturile triunghiului şi raza r a cercului înscris.*

Soluţie. Bisectoarea $DA = l$ a unghiului A, (fig. 26) a descompus triunghiul dreptunghic ABC în triunghiurile semidreptunghice ABD şi ACD cărora aplicându-le *teorema 1ª*, (No. 54, P. IIª), avem:

$$l = c\sqrt{2}\ sp\,B, \qquad l = b\sqrt{2}\ sp\,C = b\sqrt{2}\ cp\,B$$

De aci deducem:

$$\boxed{b = \frac{l}{\sqrt{2}\ cp\,B}} , \qquad \boxed{c = \frac{l}{\sqrt{2}\ sp\,B}}$$

Avem apoi:

$$\boxed{a = 2p - \frac{l}{\sqrt{2}\ sp\,B\ cp\,B}} .$$

Din *teorema* de la (No. 70, P. IIª) şi din valoarea lui c găsită mai sus, avem:

$$\boxed{r = c\ sp\frac{B}{2} = \frac{l\ sp\frac{B}{2}}{\sqrt{2}\ sp\,B}} .$$

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

2. — *Egalités vraies aux k premiers degrés, formées avec les (k + 1) premiers nombres.*

Nous obtiendrons toutes les identités multiples qui vont suivre par l'application réitérée du théoréme:

„D'une égalité multigrade vraie aux premiers degrés et renfermant un même nombre de termes dans chaque membre, soit

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p)^x = (b_1, b_2, \ldots, b_p)^x,$$
$$(x = 1, 2, \ldots, k),$$

on déduit une infinité d'égalités multigrades vraies aux (k+1) premiers degrés, avec un nombre double de termes dans chaque membre, soit 2p, par la relation

$$(a_1, a_2 \ldots, a_p, b_1 + t, b_2 + t, \ldots, b_p + t)^x =$$
$$(b_1, b_2 \ldots, b_p, a_1 + t, a_2 + t, \ldots, a_p + t)^x,$$
$$(x = 1, 2 \ldots k, k + 1),$$

t étant un entier quelconque.“ (Voir *A. Gloden*, Sur les égalités multigrades, page 12.)

Partons de l'identité

I. $1 + 1 = 0 + 2$, que nous pouvons écrire $(1, 1)^x = (0, 2)^x$, $(x = 1)$, et appliquons le théorème précédent, avec $t = 1$, il vient

II. $(1, 1, 1, 3)^x = (0, 2, 2, 2)^x \quad (x = 1, 2)$,

ou

$$3 \cdot 1^x + 3^x = 3 \cdot 2^x \qquad (x = 1, 2).$$

$$S_1 = 3 \cdot 1 + 3 = 3 \cdot 2 = 6,$$

$$S_2 = 3 \cdot 1^2 + 3^2 = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

On reconnaît qu'on peut, par ce procédé, en prenant toujours $t = 1$, former une égalité multiple d'ordre k renfermant les $(k + 1)$ premiers nombres.

Nous donnerons dans la suite seulement les résultats.

III. $(1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3)^x = (0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4)^x$,

$$(x = 1, 2, 3),$$

ou

$$4 \cdot 1^x + 4 \cdot 3^x = 6 \cdot 2^x + 4^x, \qquad (x = 1, 2, 3).$$

IV. $5 \cdot 1^x + 10 \cdot 3^x + 1 \cdot 5^x = 1 \cdot 0^x + 10 \cdot 2^x + 5 \cdot 4^x$,

$$(x = 1, 2, 3, 4).$$

V. $6 \cdot 1^x + 20 \cdot 3^x + 6 \cdot 5^x = 1 \cdot 0^x + 15 \cdot 2^x + 15\ 4^x + 1 \cdot 6^x$,

$$(x = 1, 2, 3, 4, 5).$$

VI. $7 \cdot 1^x + 35 \cdot 3^x + 21 \cdot 5^x + 1 \cdot 7^x =$

$1 \cdot 0^x + 21 \cdot 2^x + 35 \cdot 4^x + 7 \cdot 6^x$ $(x = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

VII. $8 \cdot 1^x + 56 \cdot 3^x + 56 \cdot 5^x + 8 \cdot 7^x =$

$$1 \cdot 0^x + 28 \cdot 2^x + 70 \cdot 4^x + 28 \cdot 6^x + 1 \cdot 8^x$$
$$(x = 1, 2, 3, \ldots 7).$$

VIII. $9 \cdot 1^x + 84 \cdot 3^x + 126 \cdot 5^x + 36 \cdot 7^x + 1 \cdot 9^x =$

$$1 \cdot 0^x + 36 \cdot 2^x + 126 \cdot 4^x + 84 \cdot 6^x + 9 \cdot 8^x$$
$$(x = 1, 2, 3 \ldots 8). \quad \text{etc.}$$

Nous allons indiquer la valeur des sommes des puissances semblables pour les exemples VII et VIII.

ad. VII. $S_1 = 512$, $S_2 = 2304$, $S_3 = 11264$, $S_4 = 58752$,
$S_5 = 323072$, $S_6 = 1857024$, $S_7 = 11085824$.

ad. VIII. $S_1 = 1152$, $S_2 = 5\,760$, $S_3 = 31104$,
$S_4 = 178560$, $S_5 = 1078272$, $S_6 = 6796800$,
$S_7 = 44457984$, $S_8 = 300349440$

Le lecteur généralisera aisément ces relations.

A. GLODEN

3. — *Asupra problemei 1466.* — Problema ce am propus cu acest număr şi a cărei soluţie am dat-o în *„Revista Matematică din Timişoara.* vol, XVIII, pag. 82 se poate extinde în felul următor.

Se dă punctul A *fix pe cercul* O *şi punctul* M *mobil pe o dreaptă* Δ *perpendiculară pe* A O. *Să se determine* M *aşa în cât perpendiculara in* M *pe* A M *să determine prin intersecţia cu cercul* O, *o coardă de lungime dată.*

Fie R raza cercului dat, P Q coarda căutată, B proecţia lui O pe P Q şi C intersecţia lui P Q cu O A. Din enunţ rezultă că O B, care este egală cu $\sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{BQ}^2}$, este cunoscută. Fie deci

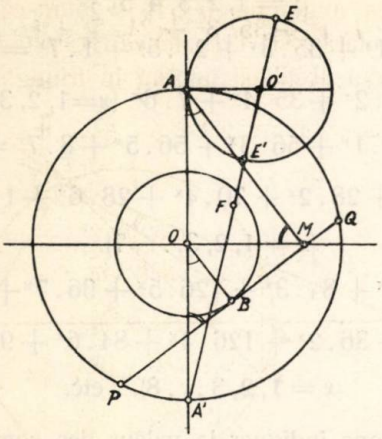
$$O B = d.$$

Triunghiurile asemeni O B C şi A O M dau

$$(1) \qquad \frac{A M}{O C} = \frac{R}{d},$$

iar triunghiul dreptunghic A M C dă

(2) $\overline{AM}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{AC} = R\,R + \overline{OC}$.



Eliminând pe OC între (1) şi (2) găsim ecuaţia

$$\overline{AM}^2 - d \cdot \overline{AM} - R^2 = 0,$$

din care se scoate

$$\overline{AM} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4R^2}}{2}.$$

Numai valoarea pozitivă este adevărată, deci avem două puncte M simetrice faţă de O.

Fie A′ diametralul lui A în O. Observând că

$$d^2 + 4R^2 = d^2 = d^2 + \overline{AA'}^2$$

rezultă pentru M următoarea construcţie grafică. Se duce prin A un cerc O′ de rază d şi tangent la AO. Fie E intersecţia lui O′ cu A′O′ aşa ca E să fie pe prelungirea lui A′O′.

Jumătatea lui A′E′ este egală cu AM, căci

$$A'E' = A'O' + d = \sqrt{d^2 + A'A^2} + d.$$

Problema este totdeauna posibilă.

G-l Gh. Buiciu

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* Anul XLIV, No. 7, Martie 1939. Adunarea generală a Societăţii „Gazeta Matematică" din 23 Februarie 1939. Dare de seamă asupra mersului Societăţii *„G. M." I. H. Alsted* la *Alba-Iulia,* de *Victor Marian.* Aplicaţii ale coordonatelor tangenţiale, de *N. Abramescu.* O problemă de construcţie, de *M. Ghermănescu.* Premiu de aritmetică. Note. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, T. 40 (1—2) 1938.* Actes du deuxième Congrès Interbalkanique des Mathématiciens.

3. *Mathematica,* Vol. XIV, 1938. Sur le prolongement analytiqe de Weierstrass, par *A. Denjoy*... Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints, par *W. Sierpinski.* Sur les fonctions conjuguées, par *Miron Nicolesco.* Sur les series de puissances, par *J. Marcinkiewicz* et *A. Zigmund.* Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, par *D. Mangeron.* Un théorème sur l'interpolation, par *J. Marcinkiewitz.* Die Mannigfaltigkeit von Perozzo als projection der Segreschen Mannigfaltigkeit M_4^6, von *E. A. Weiss.* Sur les solutions bornées et les solutions mesurables des certaines équations fonctionnelles, par *Tiberiu Popoviciu.* Über das verhalten der Funktionen von zwei Komplexen veränderlichen in Gebieten mit einer ausgezeichneter rondfläche, von *Stefan Bergmann.* La relativité non holonome et la théorie unitaire *d'Einstein* et *Meyer,* par *Kentaro Yano.* Sur les invariants de translation rélatifs aux polynomes, par *Georges Calugăreano.* Sull'équilibrio delle Piastre elastiche anulari libere, di *Carlo Tolatti.* Contributi dati dall l'Italia alle matematiche pure, dai tempi piu remoti ai giorni nostri, di *Gino Loria.* Sur les fonctions de deux variables réelles douées d'analyticité hyperbolique et leurs appliquations, par *Nicolas Cioranescu.* Sur certains cas d'univalence ou de multivalence locales, par *Paul Montel.* Sur la puissance de la famille de tous les ensembles fermés d'un espace métrique, par *W. Sierpinski.* Bibliographie mathématique roumaine. 1937.

4. *Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara,* T. 8, Fasc. 3—4, 1939. Nouveau chapitre d'Analyse Mathématique: L'intégration des fonctions quadratiques, par *V. Alaci.* Sur l'extension du théorème de *Hilbert-Schmidt* dans le cas du noyau symétrisable, par *O. N. Ţino.* Notes sur la Géométrie du triangle, par *Vincenzo G. Cavallaro* Sur la variation du moment d'inertie par rapport aux plans passant par une droite, par *Michel Ghermănescu.* Sur les réseaux à invariants égaux, par *Gheorghe Th. Gheorghiu.* Asupra constituţiei Diphenol-Dithiophenol, Di α şi β Naphtol. etc. şi a derivaţilor coloranţi ai acestora, de Dr. *Ing. C. Cândea.* Contribuţiuni la studiul microfiziografic al granitului de la *Şoimoş-Radna* (Jud. Arad), de Dr. *Victor N. Laţiu.* Studiul unor fenomene speciale la conductele sub presiune drepte de diametru 250 mm, de Prof. Ing. *Pompiliu Nicolau* şi Asist. Ing. *Victor Gheorghiu.* Influenţa numărului paletelor asupra sarcinei de refulare la o pompă centrifugală, de Ing. *A. Bărglăzan.* Zăcăminte de aur încă neexplorate, de Ing. *Ilie Popescu.* Comptes-rendus des séances de la Société Scientifique de l'École polytechnique de Timişoara.

5. *Pitagora,* Revistă de Matematici, an. IV, No. 5—6, Martie 1939. † Profesorul *Gheorghe Ţiţeica* (necrolog). O proprietate a centrului radical, de *Cezar Cosniţă.* Clasificarea curbelor de gradul al 2-lea, de *G. G. Constantinescu.* Drepte remarcabile într'un tetraedru, de *I. I. Ţiţeica.* Teorema *Miquel,* de *N. N. Mihăileanu.* Note matematice de *M. Borneas* şi *N. N. Mihăileanu.* Probleme rezolvate şi propuse.

6 *Gino Loria.* Nel secondo centenario della nascita di *G. L. Lagrange* (1736—1936).

7. *Gino Loria.* Per una più perfetta connoscenza della scuola galileiana.

8 *N. Hatzidakis.* Congruences et complexes des courbes et des surfaces.

9. *Michel Petrovitch.* Théorèmes généraux sur les équations différentielles algébriques.

10. *Albert Gloden.* De la Mécanique statistique classique aux Mécaniques statistiques quantiques

11. *Vincenzo G. Cavallaro.* Richerche di trigonometria

relative ad un triangolo fondamentale mediante serie triangolari ad esso legate.

12. *Vincenzo G. Cavallaro.* Equationi trinomie et problema geometrico della divisione ϱ nel quale rientra quello della divisione aurea risolvibili sperimentalmente con metodi fisici.

13. *G. Cavallaro.* Sugli angoloidi.

14. *Vicenzo G. Cavallaro.* Sulla vicendevole dipendenza dei metodi fondamentali della trisezione dell'angolo.

15. *G. Cavallaro.* Some notable properties on the new geometry of the triangle.

16 *Vincenzo C. Cavallaro.* Fattoriale del triangolo e dei poligoni.

17. *Vincenzo G Cavallaro.* Teoremi notevoli su un tetraedro autonormale singolare.

18. *Dott. Vicenzo G. Cavallaro.* Nuove espressioni notabili dei raggi dei cerchi di *Lemoine* e di *Brochard* e di altri elementi importanti della moderna Geometria del Triangolo.

19. *Vincenzo G. Cavallaro.* Nouve richerche sulla genesi della sezione aurea

20. *Vincenzo G. Cavallaro.* Sugli esagoni inscritibili aventi i vertici sugli estremi di tre corde concorrenti.

21. *Vicenzo G. Cavallaro.* Questioni e formule fondamentali nei sistemi di punti potenziali e radicali d'ordine *m* e di specie qualunque.

22. *Vicenzo G. Cavallaro.* Movimento su piani inclinati

23. *Vicenzo G. Cavallaro.* Nouve formule approssimate relative a lati di poligoni superiori, ai numeri e, π alla constante *d'Eulero,* etc.

24. *Michel Germănescu.* Sur la variation du moment d'inertie par rapport aux plans passant par une droite.

25. *Dr. Erich Stern.* Nouvelle méthode pour construire et denombrer certains carrés magiques d'ordre 4 m. avec application aux Parcours magiques.

26. *Dr. Erich Stern.* Résumé de contributions à une théorie générale mathématique des carrés magiques.

27. *Dr. Erich Stern.* Über irreguläre pandiagonale latei-

28. *Hans Emil Hermes.* Hormánon und Baryon. Eine Attraktions und Gravitations-Hypothese.

29. *Raymond Clare Archibald.* Outline of the hystory of mathematics.

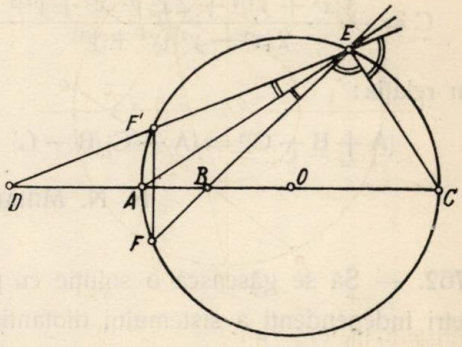
PROBLEME REZOLVATE

1290. — *Se dau trei puncte* A, B, C *în linie dreaptă. Prin punctul* B *se duce o coardă oarecare ce taie în* E *şi* F *cercul* O *de diametru* A C. *Dreapta ce uneşte punctul* E *cu simetricul lui* F *în raport cu diametrul* A C, *taie acest diametru într-un punct* D. *Să se demonstreze că:*

$$\overline{BA^2}.\overline{DC}+\overline{BC^2}.\overline{DA}=2\overline{BE}.\overline{BF}.\overline{DO}.$$

C. IVANESCU

Arcurile A F şi A F′ fiind egale, dreapta E A este bisectoarea unghiului D E B şi fiind-că C E este perpendiculară pe E A rezultă că E C este bisectoarea exterioară a aceluiaşi unghiu în triunghiul D E B.



Proprietăţile bisectoarelor dau

$$\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}=\frac{EB}{ED},$$

*** (1) $$\overline{AB}.\overline{CD}=\overline{BC}.\overline{DA}.$$

Din patrulaterul înscris A E C F avem

(2) $$\overline{BA}.\overline{BC}=\overline{BE}.\overline{BF}.$$

Inmulţind (1) cu (2) obţinem

(3) $$\overline{BA^2}.\overline{DC}=\overline{BE}.\overline{BF}.\overline{DA}.$$

Din (1) şi (2) se mai obţine însă prin înmulţire, după ce mai întâi se schimbă în (1) membrii între ei:

(4) $$\overline{BC^2}.\overline{DA}=\overline{BE}.\overline{BF}.\overline{CD}.$$

Adunând (3) cu (4) după ce se observă că

$$\overline{AD}=\overline{DO}-\overline{AO} \quad \text{şi} \quad \overline{CD}=\overline{DO}+\overline{AO}$$

se obţine relaţiunea de demonstrat

Soluţiuni analoage de la d-nii: *P. V. Cazanacli* şi *Sp. Săvulescu.*

D-l *M. F. Amărăşteanu* a dat o bună soluţie analitică.

PROBLEME PROPUSE

1760. — Scriind o cifră şi de două ori cifrele patratului ei, putem obţine un patrat perfect pe cinci cifre.

ŞTEFAN C. TILICA

1761. — Dacă,

$$A=\frac{x^3+y^3}{x-y}\ ,\quad B=\frac{x^3-y^3}{x+y}\ ,$$

$$C=\frac{3(x^4+y^4)^2+2x^2y^2(x^2+y^2)^2}{2(x^2-y^2)(x^4+y^4)}\ ,$$

avem relaţia:

$$(A+B-C)^2=(A-C)(B-C)$$

N. N. MIHAILEANU

1762. — Să se găsească o soluţie cu patru parametri independenţi a sistemului diofantian:

$$A_1+A_2+A_3=B_1+B_2+B_3$$

$$A_1^2+A_2^2+A_3^2=B_1^2+B_2^2+B_3^2$$

$$A_1^4+A_2^4+A_3^4=B_1^4+B_2^4+B_3^4$$

A. GLODEN

1763. — Se dă triunghiul ABC dreptunghic şi AD înălţimea unghiului drept. Se duce DM paralelă cu AC şi DN paralelă cu AB (M pe AB, N pe AC). Fie S aria triunghiului ABC şi S_1 aria dreptunghiului $AMDN$. Notaţiile fiind cele obicinuite, să se arate că:

$1^0.\quad 2\,S.S_1=\overline{AD}^4$

$2^0.\quad S_1=a^2\left(\frac{\sin 2B}{2}\right)^3$

$3^0.\quad \sum \sin^3 2A\,\frac{8\overline{AD}^4}{a^2.S}$

$4^0.\quad \frac{S^3}{S_1}=\frac{a^4}{8}$

MIHU CERCHEZ

1764. — Se dau punctele $A\ (a, o)$, $B\ (o, \lambda)$. Se cere ecuaţia parabolei care are pe Oy ca polară a lui A şi pe Ox ca polara a lui B. Printre aceste parabole este una care este văzută sub unghiuri drepte din A şi B. Să se arate că tangenta în vârful acestei parabole trece printr'un punct fix când B se mişcă pe Oy.

G-L GH. BUICLIU

1765. — Să se facă calculabilă prin logaritmi următoarea expresiune:

$$E=\frac{\alpha\sin x+\beta\cos x+\beta}{\alpha\cos x-\beta\sin x-\beta}$$

E. S. MODALCA

1766. — Să se determine constanta k, astfel ca să avem:

$$\frac{sp^2x+cp^2x}{2}-\frac{sp^3x+cp^3x}{3}=k\ ,$$

având $0\leqslant x\leqslant 90^0$.

V. ALACI

1767. — O bilă de greutate $\overline{G}$ se mişcă în spaţiu sub acţiunea forţelor $\overline{F_1}$ şi $\overline{F_2}$ care trec prin centrul său de greutate şi sunt conţinute în acelaşi plan vertical. Forţa $\overline{F_1}$ este orizontală, iar forţa $\overline{F_2}$ fiind situată deasupra lui $\overline{F_1}$, face cu prelungirea lui $\overline{F_1}$ unghiul α dat de relaţia

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{G}{F_1}\ .$$

Se cere: 1^0. Care este acceleraţia mişcărei? Cazuri particulare:

$$F_1=\sqrt{3}\,G,\ F_2=G;\quad F_1=\sqrt{3}\,G,\ F_2=2G.$$

2^0. Ştiind că $F_1=\sqrt{3}\,G$, să se găsească unghiul α şi mărimea forţei $\overline{F_2}$ astfel ca bila să aibă să o mişcare de urcare pe verticală, iar acceleraţia mişcărei să fie jumătate din acceleraţia gravităţii.

LT. PETRE P ALMAJAN

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakony C. (1516, 1617); *Bârlea B. Suhăţeanu* (1585, 1688, 1744, 1746, 1751); *Borneas Marius* (1684, 1752); *Chintescu M. Matei* (P., 1696, 1699, 1703, 1735, 1751); *Drăgilă Pavel* (P., 1753, 1757, 1794); *Dragomir E. Adrian* (1664, 1703, 1746, 1751); *Doscan Gh. Alexandru* (1690, 1698, 1727); *Gligor N. Ioan* (1647); *Hermann I. Carol* (P, 1386, 1405, 1430, 1472, 1483, 1554, 1574, 1595, 1638, 1683, 1688, 1699, 1751); *Luca I. Ioan* (1735, 1746, 1753); *Mureşan I. Octav* (1604); *Schapira Salo* (1681, 1729, 1674, 1746); *Segal Zigu* (P., 1745, 1746, 1748, 1751, 1752, 1753, 1754, 1757, 1758); *Şerban C-tin* (1658, 1659, 1664, 1655, 1703, 1704, 1707); *Stamate I. Ionel* (P., 1602); *Stern Erich* (A); *Topalescu Gh.* (1683, 1697).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XI-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XI, care a inceput în Martie 1938, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.,* Universitatea, Cluj.
2. *Eugen Grabovschi,* Orhei - Basarabia, Strada I. C. Brătianu 14.
3. *Ştefan Musta,* profesor, Beiuş - Bihor Str. Pavel 4.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry,* sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVIII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XIX, care a început la 15 Martie 1939.

ANUL XIX. 15 MAIU 1939 NO. 3.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. NOTE MATEMATICE: 4, 5.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1298.
5. PROBLEME PROPUSE: 1768-1775.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XIX – NO. 3 TIMISOARA, 15 MAIU 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

DE
V. ALACI
PROFESOR

PARTEA III-a

(urmare)

92. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscând ipotenuza și bisectoarea unghiului drept. Discuție.* (C. de P., p. 4.)

Soluție. Bisectoarea $AD = l$ (fig. 26) împarte triunghiul dreptunghic ABC în triunghiurile semidreptunghice ABD și ACD cărora aplicându-le *teorema 1ª* (No. 54, P. IIª), avem:

$$l = c\sqrt{2}\,sp\,B, \qquad l = b\sqrt{2}\,cp\,B.$$

Scoțând de aci valorile lui b și c și înlocuindule în relația

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

obținem:

$$a^2 = \frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{cp^2 B} + \frac{1}{sp^2 B}\right) = \frac{l^2(1 - 2\,sp\,B\,cp\,B)}{2\,sp^2 B\,cp^2 B},$$

sau

$$2a^2(sp\,B\,cp\,B)^2 + 2l^2(sp\,B\,cp\,B) - l^2 = 0.$$

De aci deducem, luând soluția ce convine:

$$sp\,B\,cp\,B = \frac{l(\sqrt{l^2 + 2a^2} - l)}{2a^2}.$$

Inlocuind pe $cp\,B$, dat de relația

$$cp\,B = 1 - sp\,B,$$

găsim:

(35) $$2a^2 sp^2 B - 2a^2 sp\,B + l(\sqrt{l^2 + 2a^2} - l) = 0.$$

Rezolvând această ecuație avem pe $sp\,B$ și deci unghiul B.

In urmă aflăm ușor celelalte elemente.

Discuție. Realizantul ecuației (35) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică

$$(a^2 + 2l^2)^2 \geqq 4l^2(l^2 + 2a^2),$$

deci,

$$a \geqq 2l,$$

fiindcă $a > 0$.

93. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscând perimetrul și raza cercului circumscris. Discuție.* (C. de P., p. 4).

Soluție. Formulele (7) din *teorema 2ª* de la triunghiurile dreptunghice, (No. 50, P. IIª) ne dau:

$$a + c = 2p\,cp\frac{B}{2}, \qquad a + b = 2p\,cp\frac{C}{2}.$$

Adunând aceste relații avem

$$a + 2p = 2p\left(cp\frac{B}{2} + cp\frac{C}{2}\right)$$

și cum $a = 2R$, deducem

(36) $$cp\frac{B}{2} + cp\frac{C}{2} = \frac{R + p}{p}.$$

De altă parte,

(37) $$cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2} = \frac{1}{2},$$

conform relației (85), (No. 72, P. IIª).

Relațiile (36) și (37) ne permit a forma ecuația

$$x^2 - \frac{R + p}{p}x + \frac{1}{2} = 0,$$

sau

(38) $$2p\,x^2 - 2(R + p)x + p = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt, $cp\frac{B}{2}, cp\frac{C}{2}$.

Odată aflate unghiurile B și C, celelalte elemente se află cu ușurință.

Discuţie. Realizantul ecuaţiei (38) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică

$$R^2 + 2pR - p^2 \geqq 0,$$

deci,

$$p \leqq R(1+\sqrt{2}),$$

p fiind pozitiv.

94. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic în care se cunoaşte* $b+c-a=\alpha$, $\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C = \beta$. *Discuţie.* (C. de P., p. 4).

Soluţie. Relaţia 2ª se mai poate scri

$$\left(\frac{1}{cp\,B}-1\right)-\left(\frac{1}{cp\,C}-1\right)=\beta$$

şi cum $cp\,C = sp\,B$, deducem:

$$sp\,B - cp\,B = \beta\, sp\,B\, cp\,B.$$

Dar, $cp\,B = 1 - sp\,B$, astfel că avem:

$$\beta\, sp^2 B - (\beta - 2)\, sp\,B - 1 = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie avem $sp\,B$ şi deci unghiul B, iar $C = 90^0 - B$.

Odată unghiurile aflate, trecem la calcularea laturilor.

In adevăr înmulţind prima relaţie din enunţ cu relaţia

$$b + c + a = 2p,$$

obţinem

$$(b+c)^2 - a^2 = 2p\alpha,$$

sau:

$$bc = p\alpha.$$

Impărţind această relaţie pe rând cu relaţiile cunoscute

$$c = 2p\, sp\frac{C}{2} \quad , \quad b = 2p\, sp\frac{B}{2},$$

teorema 2ª, (No. 50, P. IIª), găsim:

$$\boxed{b = \frac{\alpha}{2\, sp\frac{C}{2}}}, \qquad \boxed{c = \frac{\alpha}{2\, sp\frac{C}{2}}},$$

iar

$$\boxed{a = b\, cp\frac{C}{2} + c\, cp\frac{B}{2}},$$

conform *teoremei 5*, (No. 53, P. IIª).

Discuţie. Singura condiţie este, $\alpha > 0$.

Observare. Iată cum s'ar mai fi putut afla altfel unghiurile B, C.

A 2-a relaţie din enunţ se poate scri încă,

$$\beta = \frac{1-cp\,B}{cp\,B} - \frac{1-cp\,C}{cp\,C} = \frac{sp\,B - cp\,B}{cp\,B\, cp\,C} = \frac{1-2\,cp\,B}{cp\,B\, cp\,C},$$

apoi:

$$\beta + 2 = \frac{1 - 2\, cp\,B\, sp\,C}{cp\,B\, cp\,C}.$$

Impărţind aceste relaţii obţinem

$$\frac{\beta}{\beta+2} = \frac{1-2\,cp\,B}{1-2\,cp\,B\,sp\,C} = \frac{sp\,B - sp\,C}{1-2\,cp\,B\,sp\,C}.$$

Conform formulei de adiţiune (24), (No. 20, P. Iª), ultimul membru este desvoltarea lui $sp\,(B-C)$ astfel că avem:

$$sp\,(B-C) = \frac{\beta}{\beta+2}.$$

De aci aflăm pe $B-C$ şi cum $B+C=90^0$, uşor găsim unghiurile B şi C.

95. **Problemă.** *Să se determine unghiurile* B *şi* C dintr'un tringhiu dreptunghic *cunoscându-se raportul k dintre raza cercului înscris şi perimetru. Discuţie.* (C. de P., p. 4.)

Soluţie. Prin ipoteză,

$$\frac{r}{p} = k. \tag{39}$$

De altă parte, conform *teoremei* de la (No. 70, P. IIª) şi a *teoremei 2*, (No. 50, P. IIª), avem:

$$r = c\, sp\frac{B}{2} = 2p\, sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2}.$$

Inlocuind această valoare a lui r în relaţia (39), deducem:

$$sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2} = \frac{k}{2}. \tag{40}$$

De altă parte relaţia (84), (No. 72, P. II), devine în cazul triunghiului dreptunghic,

$$sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} = \frac{1}{2} + sp\frac{B}{2}\, sp\frac{C}{2},$$

sau în virtutea relaţiei (40),

$$sp\frac{B}{2} + sp\frac{C}{2} = \frac{k+1}{2}. \tag{41}$$

Relaţiile (40) şi (41) ne permit a forma ecuaţia

(42) $$2x^2-(k+1)x+k=0$$

ale cărei rădăcini sunt $sp\frac{B}{2}$, $sp\frac{C}{2}$, de unde aflăm unghiurile B şi C.

Discuţie. Realizantul ecuaţiei (42) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică

(43) $$k^2-6k+1\geqq 0$$

şi cum din relaţia (40) reiasă $k<2$, condiţia (43) devine

$$k\leqq 3-2\sqrt{2}.$$

96. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscând ipotenuza şi raza cercului înscris. Discuţie.* (C. de P., p. 4.)

Soluţie. Folosim următoarele relaţii cunoscute într'un triunghiu dreptunghic:

$$r=c\,sp\frac{B}{2},\qquad c=2p\,sp\frac{C}{2},\qquad r=p-a.$$

Eliminând pe c şi apoi pe p, obţinem

$$r=2p\,sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2}=2(a+r)\,sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2}.$$

De aci deducem:

(44) $$sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2}=\frac{r}{2(a+r)}.$$

De altă parte relaţia cunoscută într'un triunghiu dreptunghic,

$$sp\frac{B}{2}+sp\frac{C}{2}=\frac{1}{2}+sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2},$$

în virtutea relaţiei (44), ne dă:

(45) $$sp\frac{B}{2}+sp\frac{C}{2}=\frac{a+2r}{2(a+r)}.$$

Relaţiile (44) şi (45) ne permit a forma ecuaţia,

$$x^2-\frac{a+2r}{2(a+r)}x+\frac{r}{2(a+r)}=0,$$

sau:

(46) $$2(a+r)x^2-(a+2r)x+r=0,$$

ale cărei rădăcini sunt $sp\frac{B}{2}$, $sp\frac{C}{2}$ şi astfel aflăm unghiurile B şi C.

Odată unghiurile B şi C aflate, catetele sunt date de relaţiile:

$$\boxed{b=\frac{r}{sp\frac{C}{2}}},\qquad \boxed{c=\frac{r}{sp\frac{B}{2}}}.$$

Discuţie. Realizantul ecuaţiei (46) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică

$$a^2-4ar-4r^2\geqq 0$$

şi cum $a>0$, găsim condiţia:

$$a\geqq 2(\sqrt{2}+1)r.$$

97. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu dreptunghic cunoscându-se razele cercurilor înscrise în cele două triunghiuri în care triunghiul căutat este descompus prin mediana ce pleacă din* A. *Discuţie.* (C. de P., p. 4.)

Soluţie. Fie $O_1M=r_1$ şi $O_2N=r_2$ razele cercurilor înscrise în triunghiurile isoscele ABD şi ADC, AD fiind mediana din A a triunghiului dreptunghic ABC, (fig. 27).

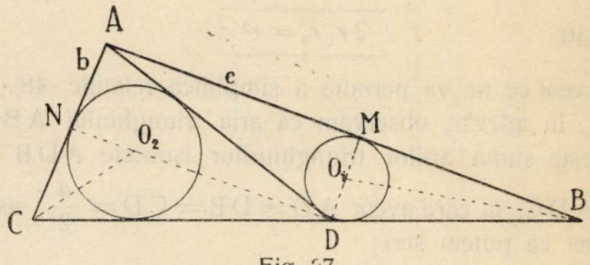


Fig. 27.

Din triunghiurile dreptunghice O_1MB şi O_2NC avem:

$$r_1=\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2},\qquad r_2=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

De altă parte, *teorema 2ª*, (No. 50, P. IIª) aplicată triunghiului dreptunghic ABC, ne dă

$$c=2p\,sp\frac{C}{2},\qquad b=2p\,sp\frac{B}{2},$$

astfel că deducem:

$$r_1=p\operatorname{tg}\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2},\qquad r_2=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}\,sp\frac{B}{2}.$$

De aci reiasă:

(47) $$r_1\,cp\frac{B}{2}=r_2\,cp\frac{C}{2}.$$

Această relaţie împreună cu relaţia cunoscută

$$cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}=\frac{1}{2},$$

ne dau,

$$(48)\qquad \boxed{cp\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{r_1}{2r_2}}},\qquad \boxed{cp\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{r_2}{2r_1}}},$$

de unde aflăm unghiurile B şi C. In urmă aflăm laturile prin relaţiile:

$$\boxed{b=2r_2\operatorname{cotg}\frac{C}{2}},\qquad \boxed{c=2r_1\operatorname{cotg}\frac{B}{2}},$$

$$\boxed{a=b\,cp\frac{C}{2}+c\,cp\frac{B}{2}}.$$

Discuţie. Din (48) deducem următoarele condiţii:

$$\frac{r_2}{2}\leqq r_1\leqq 2r_2.$$

Observare importantă. Vom arăta întâi că,

$$(49)\qquad \boxed{2r_1r_2=r^2}.$$

ceea ce ne va permite a simplifica relaţiile (48).

In adevăr, observăm că aria triunghiului A B C este suma ariilor triunghiurilor isoscele A D B şi A D C, în care avem $AD=DB=CD=\frac{a}{2}$, astfel că putem scri:

$$(50)\qquad pr=\frac{c+a}{2}r_1+\frac{b+a}{2}r_2.$$

Cum formulele (7) din *teorema 2ª* (No. 50, P. II^a), ne dau,

$$a+c=2p\,cp\frac{B}{2},\qquad a+b=2p\,cp\frac{C}{2},$$

înlocuindu-le în relaţia (50), obţinem:

$$r=r_1\,cp\frac{B}{2}+r_2\,cp\frac{C}{2}.$$

Deducem astfel ţinând seamă de relaţia (47)

$$r=2r_1\,cp\frac{B}{2}=2r_2\,cp\frac{C}{2}.$$

Inmulţind aceste relaţii şi având în vedere că,

$$2\,cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}=1,$$

găsim

$$r^2=2r_1r_2,$$

tocmai relaţia (49).

Folosind această relaţie, relaţiile (48) devin:

$$(48')\qquad \boxed{cp\frac{C}{2}=\frac{r_1}{r}},\qquad \boxed{cp\frac{B}{2}=\frac{r_2}{r}}.$$

De aci deducem următoarele relaţii remarcabile

$$(51)\qquad \boxed{\frac{r_1}{cp\frac{C}{2}}=\frac{r_2}{cp\frac{B}{2}}=r},$$

care ne permit a enunţa teorema:

Teoremă. *Dacă r_1 şi r_2 sunt razele cercurilor înscrise în cele două triunghiuri în care este descompus un triunghiu dreptunghic de mediana unghiului drept, atunci avem relaţiile (51).*

98. **Problemă.** *Se dă triunghiul dreptunghic* A B C *în care* $c>b$. *Se duce din* B *o perpendiculară pe* A B *pe care se ia punctul* E *astfel ca* $BE=b+c$. *Se determină apoi punctul* D *pe* A B *astfel ca* $AD=b$ *şi se uneşte punctul* D *cu* E. *Să se demonstreze că,*

$$\overset{\frown}{BED}=45^0-B.$$ (R. M. T.[1], problema 1640).

Soluţie. In triunghiul dreptunghic D B E (fig. 28), de

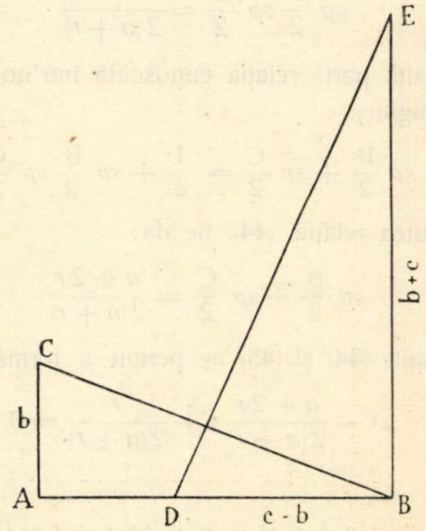


Fig. 28.

catete $DB=c-b$, $DE=b+c$, conform *teoremei I^a*, (No. 49, P. II^a), avem:

[1]) R. M. T., înseamnă: Revista Matematică din Timişoara.

(52) $$c - b = 2\,c\,sp\,\widehat{BED}.$$

De altă parte în triunghiul dreptunghic A B C,

(53) $$c - b = 2\,c\,sp\,(45 - B)$$

în virtutea *teoremei 4,* (No. 52, P. II^a).

Comparând relaţiile (52) şi (53) deducem:

$$sp\,\widehat{BED} = sp\,(45^0 - B)$$

de unde rezultă,

$$\widehat{BED} = 45^0 - B,$$

ceiace trebuia stabilit.

99. **Problemă.** *Se dă triunghiul dreptunghic* A B C *în care* A B = A C = 1. *Din* A *se duce o dreaptă oarecare care taie pe* B C *în* D *şi din* D *se duce perpendiculara* D E *pe* A B. *Pe paralela dusă la* A C *prin* B *se ia* B F = 2 D E *de partea lui* A C. *Din* F *se ia spre* B *segmentul* F G = 1. *Să se demonstreze că,*

$$\widehat{DAG} = 45^0.$$ (R. M. T., problema 1687).

Soluţie. Construim fig. 29 în condiţiile problemei şi fie,

$$\widehat{DAE} = \alpha, \quad \widehat{BAG} = \varphi.$$

Prin definiţie,

$$DE = sp\,\alpha,$$

iar din enunţ şi din figură,

$$BG = 1 - 2\,sp\,\alpha = AB\,tg\,\varphi = tg\,\varphi.$$

De altă parte,

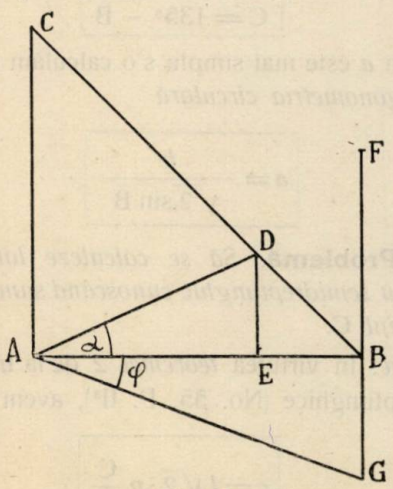


Fig. 29.

$$1 - 2\,sp\,\alpha = 1 - \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha} = tg\,(45^0 - \alpha)$$

astfel că rezultă:

$$tg\,\varphi = tg\,(45^0 - \alpha).$$

De aci deducem,

$$\alpha + \varphi = 45^0,$$

adică:

$$\widehat{DAG} = 45^0,$$

ceeace trebuia stabilit.

Probleme relative la rezolvirea triunghiurilor semidreptunghice.

100. **Problemă.** *Să se calculeze unghiurile unui triunghiu semidreptunghic* A B C[1] *în care avem:*

$$a + b = 3\,c.$$

Soluţie. In virtutea *teoremei 2* de la triunghiurile semidreptunghice (No. 55, P. II^a),

$$c = (a + b)\,\sqrt{2}\,sp\,\frac{C}{2}.$$

Inlocuind pe c astfel aflat în relaţia dată şi simplificând, găsim:

$$sp\,\frac{C}{2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{4{,}24263} = 0{,}23570.$$

Căutând în tabela 1 ce cuprinde *sinusurile patratice,* găsim:

$$0{,}23414 \ldots\ldots 17^0$$

$$0{,}23570 \ldots\ldots \frac{C}{2}$$

$$0{,}23601 \ldots\ldots 17^0,\ 10'.$$

De aci urmează:

$$\frac{C}{2} = 17^0 + \left(\frac{156 \times 10}{187}\right)' = 17^0,\ 8',\ 20''.$$

Rezultă atunci:

$$\boxed{C = 34^0,\ 16',\ 40''},\ \text{deci:}\ \boxed{B = 100^0,\ 43'\ 20''}.$$

Observare. Am putea folosi şi tabelele de logaritmi de la sfârşitul lucrării. Astfel avem:

$$\lg\,sp\,\frac{C}{2} = \log 0{,}23570 = \bar{1}{,}37236,$$

[1]) Obicinuit vom nota cu A unghiul de 45° şi vom observa că $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ sunt ascuţite.

de unde

$$\frac{C}{2} = 17^0, 8' 20''.$$

101. **Problemă.** *Intr'un triunghiu semidreptunghic* A B C *se cunosc laturile* b *şi* c. *Să se calculeze* $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Soluţie. Teorema 2ª de la triunghiurile semidreptunghice (No. 55, P. II^a), ne dă:

$$b = (a+c)\sqrt{2}\, sp\frac{B}{2}, \quad c = (a+b)\sqrt{2}\, sp\frac{C}{2}.$$

De aci deducem:

$$(54) \quad sp\frac{B}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}(a+c)}, \quad sp\frac{C}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}(a+b)}$$

şi atunci:

$$cp\frac{B}{2} = 1 - sp\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{2}(a+c)-b}{\sqrt{2}(a+c)},$$

$$(55)$$

$$cp\frac{C}{2} = 1 - sp\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}(a+b)-c}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Impărţind respectiv relaţiile (54) prin (55), obţinem:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}(a+c)-b},$$

$$(56)$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}(a+b)-c}.$$

Rămâne a calcula pe a în funcţie de b şi c.

Pentru aceasta folosim teorema cunoscută din *Trigonometria circulară* exprimată prin relaţia:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - \sqrt{2}\, bc,$$

astfel că relaţiile (56) devin:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{b}{\sqrt{2}\,(c+\sqrt{b^2+c^2-\sqrt{2}\,bc})-b}},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}\,(b+\sqrt{b^2+c^2-\sqrt{2}\,bc})-c}},$$

102. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu semidreptunghic* A B C, *cunoscându-se latura* b *şi unghiul* B.

Soluţie. 1°. Dacă $B \leqq 90^0$, atunci *teorema 1ª* de la triunghiurile semidreptunghice, (No. 54, P. II^a) ne dă

$$b = c\sqrt{2}\, sp\, B,$$

deci:

$$\boxed{c = \frac{b}{\sqrt{2}\, sp\, B}}.$$

2°. Dacă $B > 90^0$ aceiaşi teoremă ne permite a scri:

$$\boxed{c = b\sqrt{2}\, sp\,(45^0 + B)}.$$

In ambele cazuri,

$$\boxed{a = \frac{b}{\sqrt{2}\sin B}},$$

cum reiasă din teorema sinusurilor din *Trigonometria circulară*. Apoi,

$$\boxed{C = 135^0 - B}.$$

103. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu semidreptunghic* A B C *cunoscând laturile* b *şi* c.

Soluţie. Aplicând *teorema 1ª* de la triunghiurile semidreptunghice (No. 54, P. II^a) pentru latura cea mai mică b de exemplu, avem:

$$b = c\sqrt{2}\, sp\, B,$$

de unde:

$$\boxed{sp\, B = \frac{b}{c\sqrt{2}}}.$$

Odată unghiul B aflat,

$$\boxed{C = 135^0 - B},$$

iar latura a este mai simplu s'o calculăm cu formula din *Trigonometria circulară*

$$\boxed{a = \frac{b}{\sqrt{2}\sin B}}.$$

104. **Problemă.** *Să se calculeze laturile unui triunghiu semidreptunghic cunoscând suma* $a + b = l$ *şi unghiul* C.

Soluţie. In virtutea *teoremei 2* de la triunghiurile semidreptunghice (No. 55, P. II^a), avem

$$\boxed{c = l\sqrt{2}\, sp\frac{C}{2}},$$

iar:

$$\boxed{B = 135^0 - C}.$$

Rămâne să mai aflăm laturile b şi a. Pentru aceasta folosim *teorema 1ª*, (No. 54, P. IIª) şi avem:

1°. Dacă $B \leq 90°$, atunci:

$$\boxed{b = c\sqrt{2}\, sp\, B = 2l\, sp \frac{C}{2}\, sp\, B}.$$

2°. Dacă $B > 90°$, avem însă:

$$\boxed{b = \frac{c}{\sqrt{2}\, sp\,(45° + B)} = \frac{l\, sp \frac{C}{2}}{sp\,(45° + B)}}.$$

Latura a o calculăm însă mai simplu cu teorema sinusurilor din *Trigonometria circulară*, anume:

$$\boxed{a = \frac{c}{\sqrt{2}\sin C} = \frac{l\, sp \frac{C}{2}}{\sin C}}.$$

105. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu semidreptunghic* A B C *cunoscând suma* $a + b = l$ *şi latura* c.

Soluţie. Folosim *teorema 2ª*, (No. 55, P. IIª) şi avem:

$$c = (a + b)\sqrt{2}\, sp \frac{C}{2},$$

de unde:

$$\boxed{sp \frac{C}{2} = \frac{c}{l\sqrt{2}}}.$$

Odată unghiul C aflat,

$$\boxed{B = 135° - C}.$$

Latura b este dată de relaţia,

$$\boxed{b = c\sqrt{2}\, sp\, B = 2l\, sp\, B\, sp \frac{C}{2}},$$ dacă $B \leq 90°$,

sau de relaţia,

$$\boxed{b = \frac{c}{\sqrt{2}\, sp\,(45° + B)} = \frac{l\, sp \frac{C}{2}}{sp\,(45° + B)}},$$ dacă $B > 90°$,

conform *teoremei 1ª*, (No. 54, P. IIª).

Odată latura b aflată,

$$\boxed{a = l - b}.$$

106. **Problemă.** *Intr'un triunghiu semidreptunghic* A B C *se cunosc sumele* $a + b = m$, $a + c = n$. *Se cere să se rezolve triunghiul. Discuţie.* (R. M. T., problema 1719).

Soluţie. Teorema 2ª de la triunghiurile semidreptunghice (No. 55, P. IIª) ne dă:

$$(57) \qquad b = n\sqrt{2}\, sp \frac{B}{2}, \qquad c = m\sqrt{2}\, sp \frac{C}{2}.$$

Scăzând aceste relaţii şi observând că din enunţ rezultă, $b - c = m - n$, avem:

$$(58) \qquad n\sqrt{2}\, sp \frac{B}{2} - m\sqrt{2}\, sp \frac{C}{2} = m - n.$$

Să căutăm o altă relaţie între $sp \frac{B}{2}$ şi $sp \frac{C}{2}$.

In adevăr, fiindcă

$$sp \frac{A}{2} = sp\, 22°, 30' = \frac{2 - \sqrt{2}}{2},$$

conform relaţiei (42), (No. 23, P. Iª), atunci relaţia (84), (No, 72, P. IIª) devine

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2} + sp \frac{B}{2} + sp \frac{C}{2} = 1 + (2 - \sqrt{2})\, sp \frac{B}{2}\, sp \frac{C}{2},$$

sau:

$$(59) \qquad \sqrt{2}\left(sp \frac{B}{2} + sp \frac{C}{2}\right) = 1 + 2(\sqrt{2} - 1)\, sp \frac{B}{2}\, sp \frac{C}{2}.$$

Scoatem valorile lui $sp \frac{C}{2}$ din relaţiile (58), (59) şi avem:

$$sp \frac{C}{2} = \frac{n\sqrt{2}\, sp \frac{B}{2} - m + n}{m\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}\, sp \frac{B}{2}}{\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} - 1) sp \frac{B}{2}}.$$

Efectuând calculele găsim ecuaţia,

$$(60) \quad 2(\sqrt{2} - 1)\, n\, sp^2 \frac{B}{2} - 2\left[m + (\sqrt{2} - 1)\, n\right] sp \frac{B}{2} + 2m - n = 0,$$

care rezolvată ne dă $sp \frac{B}{2}$, deci unghiul B.

Unghiul B aflat,

$$\boxed{C = 135° - B},$$

iar laturile b şi c sunt date de relaţiile (57) de mai sus.

Avem apoi:

$$\boxed{a = m - b}.$$

Discuţie. Realizantul ecuaţiei (60) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică:

$$m^2 + n^2 - 2(\sqrt{2} - 1)\, m\, n \geqq 0.$$

107. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu semidreptunghic* A B C, *cunoscând perimetru* $2p$ *şi unghiul* C.

Soluţie. Avem,

$$\boxed{B = 135^0 - C}.$$

Aplicăm acum triunghiului semidreptunghic A B C *teorema 2ª*, (No. 55, P. IIª) şi avem:

$$c = (a + b)\sqrt{2}\, sp\, \frac{C}{2} = (2p - c)\sqrt{2}\, sp\, \frac{C}{2},$$

$$b = (2p - b)\sqrt{2}\, sp\, \frac{B}{2}.$$

De aci deducem:

$$\boxed{c = \frac{2\sqrt{2}\, p\, sp\, \frac{C}{2}}{1 + \sqrt{2}\, sp\, \frac{C}{2}}}, \qquad \boxed{b = \frac{2\sqrt{2}\, p\, sp\, \frac{B}{2}}{1 + \sqrt{2}\, sp\, \frac{B}{2}}}.$$

Odată aflate laturile b şi c avem:

$$\boxed{a = 2p - (b + c)}.$$

108. **Problemă.** *Cunoscând în triunghiul semidreptunghic* A B C *latura* c *şi înălţimea* h_c, *ce cere să se rezolve triunghiul.*

Soluţie. Vom considera două cazuri, fig 30.

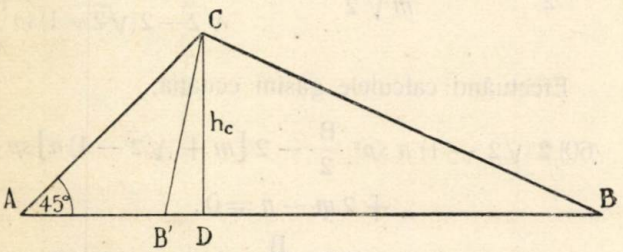


Fig. 30.

1°. $h_c < c$. Aplicăm triunghiului dreptunghic D B C *teorema 1ª*, (No. 49, P. IIª), avem:

$$h_c = (h_c + D\,B)\, sp\, B = c\, sp\, B,$$

de unde:

$$\boxed{sp\, B = \frac{h_c}{c}}.$$

Celelalte elemente sunt uşor de aflat.

2°. $h_c > c$. In acest caz triunghiul de rezolvit este A B' C, (fig. 30).

Aplicând triunghiului dreptunghic D B' C *teorema 4ª*, (No. 52, P. IIª), avem:

$$C\,D - B'\,D = 2\,C\,D\, sp\,[45^0 - (45^0 - C)],$$

sau:

$$c = 2\, h_c\, sp\, C.$$

De aci deducem:

$$\boxed{sp\, C = \frac{c}{2\, h_c}}.$$

Celelalte elemente sunt uşor de aflat.

109. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu semidreptunghic* A B C *cunoscând perimetrul* $2p$ *şi suprafaţa* S. *Discuţie.*

Soluţie. Teorema 2ª de la triunghiurile semidreptunghice (No. 55, P. IIª), ne dă:

$$b = (2p - b)\sqrt{2}\, sp\, \frac{B}{2}, \qquad c = (2p - c)\sqrt{2}\, sp\, \frac{C}{2},$$

de unde deducem:

$$(61)\quad b = \frac{2\sqrt{2}\, p\, sp\, \frac{B}{2}}{1 + \sqrt{2}\, sp\, \frac{B}{2}}, \qquad c = \frac{2\sqrt{2}\, p\, sp\, \frac{C}{2}}{1 + \sqrt{2}\, sp\, \frac{C}{2}},$$

Aceste valori ale lui b şi c le înlocuim în formula care ne dă suprafaţa triunghiului A B C, anume:

$$S = \frac{b\, c \sin A}{2} = \frac{b\, c\sqrt{2}}{4}$$

şi avem:

$$(62)\quad S = \frac{2\sqrt{2}\, p^2\, sp\, \frac{B}{2}\, sp\, \frac{C}{2}}{1 + \sqrt{2}\left(sp\, \frac{B}{2} + sp\, \frac{C}{2}\right) + 2\, sp\, \frac{B}{2}\, sp\, \frac{C}{2}}.$$

De altă parte avem

$$(63)\quad \sqrt{2}\left(sp\, \frac{B}{2} + sp\, \frac{C}{2}\right) = 1 + 2(\sqrt{2} - 1)\, sp\, \frac{B}{2}\, sp\, \frac{C}{2}.$$

relaţiile (59) din problema (No. 106).

Dacă notăm pentru prescurtare

(64) $sp\frac{B}{2}+sp\frac{C}{2}=x, \quad sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2}=y$

relaţiile (62) şi (63) devin respectiv:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\,Sx+2(S-\sqrt{2}\,p^2)y=-S\\ \sqrt{2}\,x-2(\sqrt{2}-1)y=1.\end{cases}$$

Rezolvind acest sistem şi ţinând seamă de notaţiile (64), avem:

$$sp\frac{B}{2}+sp\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{2}p^2+(\sqrt{2}-2)S}{2(p^2-S)},$$

$$sp\frac{B}{2}\,sp\frac{C}{2}=\frac{S}{\sqrt{2}(p^2-S)}.$$

Aceste relaţiuni ne permit a forma ecuaţia

$$t^2-\frac{\sqrt{2}p^2+(\sqrt{2}-2)S}{2(p^2-S)}t+\frac{S}{\sqrt{2}(p^2-S)}=0,$$

sau

(65) $2(p^2-S)t^2-[\sqrt{2}p^2+(\sqrt{2}-2)S]t+\sqrt{2}S=0,$

ale cărei rădăcini sunt $sp\frac{B}{2}$, $sp\frac{C}{2}$. Aflăm astfel unghiurile B şi C, iar laturile b şi c se află în urmă cu ajutorul relaţiilor (61).

Apoi,

$$\boxed{a=\frac{b}{\sqrt{2}\sin B}}.$$

Discuţie. Realizantul ecuaţiei (65) trebuie să fie pozitiv sau nul, adică:

$$p^4+(3+2\sqrt{2})S^2+2(1-3\sqrt{2})p^2S\geqq 0.$$

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

4. *Curiosités arithmétiques.*

1. Nous avons signalé que, dans le système décimal, le premier carré dont toutes les tranches de deux chiffres consécutifs sont divisibles par 11, après $7744=88^2$, est[1]

$$5500002244=74162^2.$$

Voice une relation intéressante entre ces deux carrés et le nombre cyclique bien connu $N=142857$:[2]

$$(142857+1)\times 7700+44=5500002244=74162^2.$$

2. Si on observe que

$$a(a+3)+1=(a+1).(a+2)+1,$$

le produit

$$P=a\times(a+1)\times(a+2)\times(a+3)$$

de quatre nombres entiers consécutifs, peut s'écrire

$$P=[(a^2+3a+1)-1]\times[(a^2+3a+1)+1],$$

de sorte que

$$P+1=(a^2+3a+1)^2=Q^2.$$

Dès lors, si les deux opérations arithmétiques

$$\begin{array}{r} a+2\\ \times\ a+1\\ \hline a\ \ 2\\ a^2\ 2\,a\\ \hline a^2\ 3\,a\ \ 2\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} a+3\\ \times\ a\\ \hline a^2\ \ 3\,a\end{array}$$

s'effectuent sans qu'on ait à faire de retennues, on a, entre les nombres entiers qui s'écrivent $\overline{a}$, $\overline{a+1}$, $\overline{a+2}$, $\overline{a+3}$ et celui qui s'écrit $\overline{a^2\,3\,a\,1}$, la relation

$$a\times\overline{a+1}\times\overline{a+2}\times\overline{a+3}=(\overline{a^2\,3\,a\,1})^2,$$

dans tout système de numération dont la base B est supérieure au chiffre le plus élevé de Q.

Exemples. On a

$$110\times 111\times 112\times 113=12431^2$$

et

$$120\times 121\times 122\times 123=14761^2,$$

dans tous les systèmes de bases $B>4$ et $B>7$.

V. THÉBAULT
(Le Mans, France)

5. *Chaines trigrades avec 6 ou 8 termes par maillon.*

A) *6 termes par maillon.*

Nous avons donné dans „Tohoku Mathematical Journal", juin, 1937, p. 391, une solution à 7 paramètres d'une chaîne trigrade, avec 6 termes par maillon, et 3 maillons (éléments).

Nous indiquerons ici un procédé pour obtenir une chaîne trigrade, ayant 6 termes par élément, et autant d'éléments qu'on veut.

Considérons p. ex. le nombre 7^3. On a

$$7^3=18^2+18.1+1^2=14^2+14.7+7^2,$$

[1]) *Mathesis* 1938–92.
[2]) Cfr. *G. Fistié, Mathesis,* 1937–111.

donc

$$2.7^3 = 1^2 + 18^2 + 19^2 = 7^2 + 14^2 + 21^2,$$

et

$$(t-19)^p + (t-18)^p + (t-1)^p + (t+1)^p + (t+18)^p + (t+19)^p =$$
$$(t-21)^p + (t-14)^p + (t-7)^p + (t+7)^p + (t+14)^p + (t+21)^p,$$
$$(p = 1,\ 2,\ 3).$$

Pour avoir des termes tous positifs et minima, nous prendrons $t = 22$; il vient

$$3^p + 4^p + 21^p + 23^p + 40^p + 41^p = 1^p + 8^p + 15^p + 29^p + 36^p + 43^p. \quad (p = 1,\ 2,\ 3).$$

En considérant le nombre 7^5, on trouve

$$2.7^5 = 62^2 + 87^2 + 149^2 = 49^2 + 98^2 + 147^2 = 7^2 + 126^2 + 133^2,$$

et, en faisant $t = 150$:

$$1^p + 63^p + 88^p + 212^p + 237^p + 299^p =$$
$$3^p + 52^p + 101^p + 199^p + 248^p + 297^p = \quad (p = 1, 2, 3)$$
$$17^p + 24^p + 143^p + 157^p + 276^p + 283^p.$$

$$S_1 = 900, \quad S_2 = 202228, \quad S_3 = 154440.$$

D'une manière générale, un nombre N, composé de facteurs de la forme $a^2 + ab + b^2$, donne lieu à autant de chaînons à 6 termes qu'il admet de décompositions distinctes de la forme considérée.

Les chaînes ainsi obtenues sont un même temps quintigrades, c. à d. vraies pour $p = 1, 2, 3, 4, 5$ (voir Revista Matematica, Timişoara, 1938, No. 11, p. 123).

Voici un exemple d'une chaîne trigrade à 4 maillons (qui n'est pas quintigrade).

On a $614 = 2.307 = 2(17^2 + 17.1 + 1^2)$
$= 1^2 + 17^2 + 18^2 = 2^2 + 13^2 + 21^2$
$= 3^2 + 11^2 + 22^2 = 6^2 + 7^2 + 23^2.$

Il vient, avec $t = 24$,

$$6^p + 7^p + 23^p + 25^p + 41^p + 42^p =$$
$$3^p + 11^p + 22^p + 26^p + 37^p + 45^p =$$
$$2^p + 13^p + 21^p + 27^p + 35^p + 46^p =$$
$$1^p + 17^p + 18^p + 30^p + 31^p + 47^p,$$
$$(p = 1,\ 2,\ 3).$$

$$S_1 = 144, \quad S_2 = 4684, \quad S_3 = 171360.$$

B. *8 termes par maillon.*

Nous avons démontré le théorème suivant:

Si un nombre est de n façon distinctes une somme de 3 carrés (tous différents l'un de l'autre), son carré est décomposable de $C_n^2 \cdot A_3^2$ *façons distinctes en une somme de 4 carrés.*

Le nombre 1169^2 donne lieu à la chaîne suivante:

$$(14,\ 1030,\ 1075,\ 1130,\ 1210,\ 1265,\ 1310,\ 2326)^p =$$
$$(210,\ 514,\ 1050,\ 1155,\ 1185,\ 1290,\ 1826,\ 2130)^p =$$
$$(58,\ 902,\ 947,\ 1078,\ 1262,\ 1393,\ 1438,\ 2282)^p =$$
$$(162,\ 638,\ 918,\ 1107,\ 1233,\ 1422,\ 1702,\ 2178)^p =$$
$$(122,\ 778,\ 833,\ 1138,\ 1202,\ 1507,\ 1562,\ 2218)^p =$$
$$(118,\ 832,\ 913,\ 962,\ 1378,\ 1427,\ 1508,\ 2222)^p =$$
$$(1,\ 1170,\ 1170,\ 1170,\ 1170,\ 1170,\ 1170,\ 2339)^p$$
$$(p = 1,\ 2,\ 3).$$

$S_1 = 9360$ etc.

A l'aide des décompositions des nombres 341^2 et 614^2 (que nous avons données dans Revista Matematica din Timişoara, 1938, *pp* 85 et 86), on peut obtenir des chaînes trigrades à 19 resp. 37 maillons, avec 8 termes par maillon.

On peut obtenir par le même pocédé des solutions paramétriques.

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XLIV, No. 8, Aprilie 1939. Algebra lui *E. Bacaloglu,* de *Florica Câmpan. I. H. Alsted* la *Alba-Iulia,* de *Victor Marian.* O problemă de construcţie, de G-l *Gh. Buicliu.* Premiul *„Inginer Al. Roşu“,* de *Gh. Dumitrescu,* Cpt. *C-dor Grigore Zapan, Al. A. Roşu.* Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Revista de Ciencias,* anul XL, 1938. Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne, par *Robert Fortet.* Le problème principal de la balistique extérieure, par *Godofredo Garcia.* Sur les coefficients des fonctions univalentes dans le cercle unité par *Alfred Rosemblatt.* Nouvelles recherches sur les coefficients des séries univalentes, par *Alfred Rosemblatt.* Sur les problèmes du Calcul des Variations des intégrales simples dans le cas des extrémités variables, par *Alfred Rosemblatt.*

3. *Boletin Matematico,* anul XII, No 1, Martie 1939, Buenos-Aires. Asupra sumării seriilor, de *M. O. Gonzales.* Condiţii suficiente pentru o problemă de calculul variaţiilor, de *G. M. Ewing.* Probleme propuse.

4. *Boletin Matematico,* anul XII, No. 2, Martie 1939, Buenos-Aires. Incă o observare asupra notei 17 „Bol. Mat.“, No. 9, an XI, de *A. Moessner.* Teorema lui *Menelau* dedusă din teorema lui *Ceva,* de *M. O. Gonzales.* Probleme rezolvate şi propuse.

5. *Ştiinţă şi Progres,* Revista Ştiinţifică a liceelor militare, anul V, N-rile 7 şi 8, 1939. † *Gheorghe Ţiţeica.* Asupra cercurilor ortogonale, de *N. N. Mihăileanu.* Ecuaţii pseudo-

bipatrate şi pseudo-reciproce de gradul al 4-lea, de Prof. *I. V. Mătieş*. Probleme rezolvate şi propuse.

6. *Pitagora*, Revistă de Matematici, anul IV, No. 7, Aprilie 1939. Asupra unei probleme de geometrie elementară, de *Petre Boldescu*. Teorema lui *Kariya*, de *Cezar Cosniţă*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

7. *Constantin D. Buşilă*. Invăţământul technic superior, partea II-a.

8. *Michel Ghermănescu*. Sur une classe nouvelle de noyaux de *Fredholm*.

9. *A. S. Bang*. Über Summen von fünften Potenzen. (Congrès des Mathématique à *Helsingfors*, 1938.)

10. *N. Kritikos*. Sur quelques propriétés des ensembles convexes

11. *Caïus Jacob*. Sur la formation du potentiel complexe de l'écoulement plan d'un liquide dans un domaine multipliment conexe.

12. *Caïus Jacob*. Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème de *Dirichlet*.

13. *Caïus Jacob*. Sulla generalizzazione di una formula di *Cisotti* e sua applicazione allo studio dei movimenti lenti di un fluido comprimibile.

14. *Caïus Jacob*. Sur la coefficient de contraction des jets gazeux.

15. *Caïus Jacob*. Sur quelques conditions aux limites susceptibles de déterminer une fonctions analytique.

16. *Cristea Predescu*. Memoriu de titluri, activitate şi lucrări publicate.

PROBLEME REZOLVATE

1298. — *Fie* A B C *un triunghiu oarecare, iar* h_a, h_b, h_c *înălţimile lui. Pe laturile* A B *şi* A C *se iau respectiv înspre* B *şi* C *segmentele* $AC_a = 2h_c$ *şi* $AB_a = 2h_b$. *Perpendicularele ridicate in* C_a *şi* B_a *respectiv pe* AC_a *şi* AB_a *se taie în* P_a. *Analog obţinem punctele* P_b *şi* P_c. *Să se demonstreze că:*

1°. *Dreptele* AP_a, BP_b, CP_c *sunt concurente.*

2°. *Dreptele* B_aC_a *şi analoagele ei, taie laturile triunghiului* A B C *în trei puncte colineare.*

C. IVANESCU

1°. 1°. Dacă S′ este suprafaţa triunghiului, avem

$$4S = AB \times 2h_c = AB \times AC_a = AC \times AB_a,$$

care arată că patrulaterul $C_a B C B_a$ este inscriptibil şi deci

(1) $$\sphericalangle B C_a B_a = \sphericalangle A C B.$$

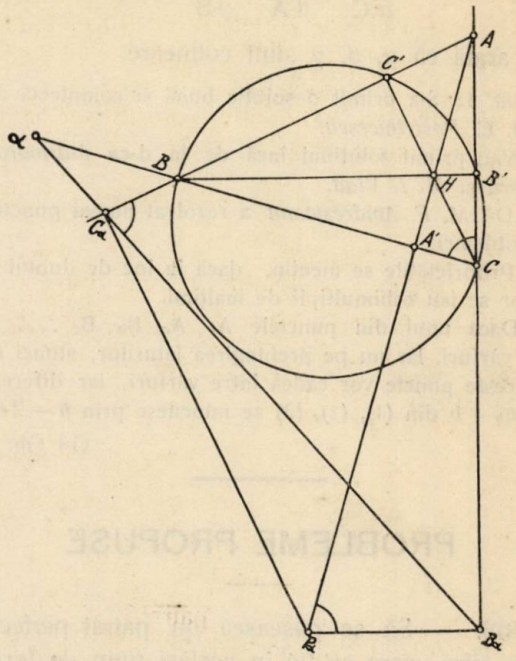
Patrulaterul $C_a A B_a P_a$ având unghiurile din C_a şi B_a drepte este de asemeni inscriptibil, deci

(2) $$\sphericalangle A C_a B_a = \sphericalangle A P_a B_a.$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\sphericalangle A P_a B_a = \sphericalangle A C B,$$

ceiace arată că dacă A′ este intersecţia lui B C cu AP_a, atunci patrulaterul $P_a A' C B_a$ este de asemeni inscriptibil şi cum unghiul din B_a este drept



prin construcţie, unghiul din A′ este de asemeni drept Prin urmare AP_a *este pe înălţimea* AA′ *şi deci dreptele* AP_a, BP_b, CP_c *concură în ortocentrul triunghiului* A B C.

2°. Fie α, β, γ intersecţiile laturilor triunghiului respectiv cu B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c.

Triunghiul A B C tăiat de transversala $\alpha C_a B_a$ dă

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{B_a C}{B_a A} \cdot \frac{C_a A}{C_a B} = 1.$$

Dar prin construcţie se dă

$$B_aC = 2h_b - b; \qquad C_aA = 2h_c$$

$$B_aA = 2h_b; \qquad C_aB = 2h_c - c,$$

de unde rezultă

(1) $$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{2h_b - b}{2h_b} \cdot \frac{2h_c}{2h_c - c} = 1.$$

In mod anolog găsim

(2) $$\frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{2h_c - c}{2h_c} \cdot \frac{2h_a}{2h_a - a} = 1,$$

(3) $$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{2h_a - a}{2h_a} \cdot \frac{2h_b}{2h_b - b} = 1.$$

Inmulţind (1), (2), (3) membru cu membru se găseşte

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=1,$$

care arată că α, β, γ sunt colineare.

Notă. 1. S-a primit o soluţie bună şi completă de la d-l *M. C. Postelnicescu.*

2. S'au primit soluţiuni încă de la d-ra *Mărioara N. Popescu* şi *M. I. Vlad.*

3. D-l *M. F. Amăreşteanu* a rezolvat numai punctul 1° al problemei.

4. Proprietăţile se menţin, dacă în loc de dublul înălţimilor se iau echimultipli de inalţimi.

5. Dacă unul din punctele A_b, A_c, B_a, B_c, ... cade între vârfuri, iar nu pe prelungirea laturilor, atunci două din aceste puncte vor cădea între vârfuri, iar diferenţele cu $2h_b - b$ din (1), (2), (3) se înlocuesc prin $b - 2h_b$.

G-l Gh. B.

PROBLEME PROPUSE

1768. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, care să fie în acelaşi timp de formele mult. $3+1$, mult. $4+1$, mult. $5+1$.

IONEL I. STAMATE

1769. — Dacă a, b, c sunt numere întregi prime între ele două câte două, astfel ca

$$a^2=b^2+c^2,$$

şi n un întreg oarecare, atunci numerile

$$A=(n+1)a+nb+nc$$

$$B=na+(n-1)b+nc$$

$$C=na+nb+(n-1)c$$

sunt de asemeni prime între ele două câte două.

Pentru ce valori ale lui n avem

$$A^2=B^2+C^2?$$

V. THÉBAULT

1770. — Să se găsească toate progresiile

$$\div ab\,.\,cd.\,\ldots\,.mn.\,ba$$

cu termenii de câte două cifre, primul şi ultimul fiind numere inversate.

G-L GH. BUICLIU

1771. — Să se rezolve în numere întregi ecuaţiunea

$$x^2+2=y^2+z^2+t^2.$$

A. GLODEN

1772. — Fie două cercuri exterioare unul altuia O_1 şi O_2. Se duc tangentele exterioare A_1A_2 şi B_1B_2, tangentele interioare C_1C_2 şi D_1D_2. Dreapta A_1C_1 taie dreapta A_2C_2 în punctul E şi dreapta A_1D_1 taie dreapta A_2D_2 în punctul F. Fie G şi H respectiv mijloacele segmentelor A_1B_1 şi A_2B_2. Să se arate că patrulaterul EFGH este un romb; iar punctele B_1, B_2, E, F sunt aşezate pe un cerc.

LT. C. D. IONESCU-TIU

1773. — Se dă un triunghiu dreptunghic ABC în care $B>C$.

Un alt triunghiu dreptunghic are aceiaşi ipotenuză BC şi unghiul ascuţit $\frac{B-C}{2}$. Se cere cateta opusă acestui unghiu $\frac{B-C}{2}$ în funcţie de laturile triunghiului ABC. Soluţie trigonometrică şi geometrică.

SUB-LT MARIN STEFANESCU

1774. — Dacă

$$x=\frac{b\lambda}{b-\mu},\quad y=\frac{a\mu}{a-\lambda}$$

avem şi

$$\frac{\lambda}{a}-\frac{\mu}{b}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

unde $x=a\operatorname{tg}\alpha$, $x=a\operatorname{tg}\alpha, y=b\operatorname{tg}\beta$.

N. N. MIHAILEANU

1775. — Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu, să se arate că avem:

$$sp\frac{A}{4}\,cp\frac{B}{4}+sp\frac{B}{4}\,cp\frac{C}{4}+sp\frac{C}{4}\,cp\frac{A}{4}=\frac{1}{2}.$$

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bârlea Suhăţeanu (1574, 1665, 1688, 1703); *Checian Anişoara* (1757, 1760); *Cristea I. Nicolae* (1069, 1080, 1094, 1104, 1151, 1409, 1470, 1471, 1491, 1537, 1665, 1668, 1684, 1701); *Dăscălescu St. Hristache* (P. 1702, 1720, 1746, 1748, 1749, 1751); *Doscan Gh. Alexandru* (1684, 1696, 1727); *Drăgilă Pavel* (P., 1737, 1738, 1749, 1760, 1765, 1767); *Dragomir M. Ermin* (1567, 1585, 1688); *Goga Florian* (1754, 1757, 1763); *Gligor N. Ioan* (1760); *Hermann I. Carol* (1280, 1296, 1618, 1634, 1652, 1658, 1728, 1752); *Jidanu C-tin* (P., 1726, 1733, 1738); *Modâlcă S. Emil* (1735, 1753, 1763); *Papadopol D. Elena* (1626, 1647, 1688, 1690, 1702, 1746, 1752); *Spătaru Alexandru* (1678, 1684, 1696, 1716, 1725, 1746, 1751); *Vijelie Gh. Eugen* (P., 1583, 1661, 1735, 1746, 1751).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XII-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XII, care a inceput în Martie 1939, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry*, sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVIII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XIX, care a început la 15 Martie 1939.

ANUL XIX. 15 IUNIE 1939 NO. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. **DR. ERICH STERN**: CARRÉS A PRODUITS MAGIQUES.
3. NOTE MATEMATICE: 6, 7.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1638, 1753.
6. PROBLEME PROPUSE: 1776-1783.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XIX — No 4 TIMISOARA, 15 IUNIE 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

DE
V. ALACI
PROFESOR

PARTEA III-a

(urmare)

110. **Problemă.** *In triunghiul semidreptunghic* A B C *se dă unghiul ascuțit* B *și mediana* B D = *l. Se cere să se rezolve triunghiul.*

Soluție. Fiindcă,

$$A C = 2 A D,$$

rezultă conform *teoremei 3* (No. 56, P. II^a),

$$(66) \qquad sp\, B = 2\, sp\, \beta, \qquad (\beta = \widehat{A B D}).$$

De altă parte în triunghiurile semidreptunghice A B C și A B D, în virtutea *teoremelor 1 și 2,* (N-rile 54, 55, P. II^a) avem respectiv:

$$(67) \quad b = c\sqrt{2}\, sp\, B, \qquad \frac{b}{2} = (l + c)\sqrt{2}\, sp\, \frac{\beta}{2}.$$

De aci rezultă,

$$c\, sp\, B = 2(l + c)\, sp\, \frac{\beta}{2},$$

deci:

$$\boxed{c = \frac{2 l\, sp\, \frac{\beta}{2}}{sp\, B - 2\, sp\, \frac{\beta}{2}}},$$

unde β se calculează din relația (66. Celelalte elemente sunt ușor de aflat.

111. **Problemă.** *Avem un triunghiu dreptunghic* A B C, *în care* B $< 45^0$. *Ducem bisectoarea* A D *a unghiului drept* A *și o prelungim cu* D E = A D, *apoi luăm pe* A B *segmentul* A F = A C *și în* F *ducem o perpendiculară pe* A B, *care întâlnește pe* B E *în* G. *Să se demonstreze că,* F G = 2 A C. (R. M. T., problema 1726.)

Soluție. In triunghiul semidreptunghic A B E (fig. 31), având A E = 2 A D, conform *teoremei 3* (No. 56, P. II^a) avem și relația:

$$(68) \qquad sp\, \alpha = 2\, sp\, B, \qquad (\alpha = \widehat{A B E}).$$

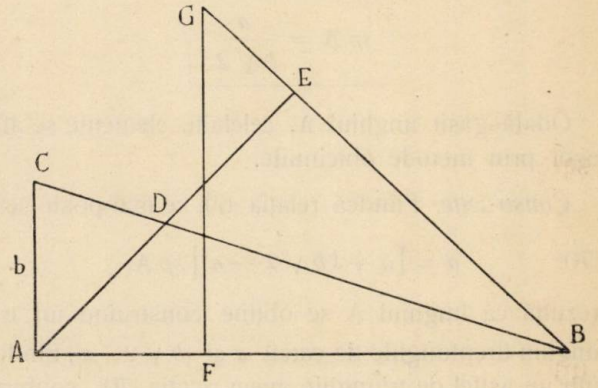


Fig 31.

De altă parte, în triunghiurile dreptunghice F B G și A B C, în virtutea *teoremei 1^a* (No. 49, P. II^a) avem respectiv:

$$F G = (F G + c - b)\, sp\, \alpha, \qquad b = (b + c)\, sp\, B.$$

Scoatem de aci valorile lui $sp\, \alpha$, $sp\, B$ și le înlocuim în relația (68), obținem:

$$\frac{F G}{F G + c - b} = \frac{2 b}{b + c}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor, găsim:

$$\frac{F G}{c - b} = \frac{2 b}{c - b}.$$

De aci rezultă

$$F G = 2 b,$$

ceeace trebuia demonstrat.

Triunghiuri în care diferența a două unghiuri este 45°.

112. **Problemă.** *Să se rezolve și să se construiască un triunghiu, cunoscând două laturi și știind că diferența unghiurilor opuse lor este 45°.*

Soluție. Fie un triunghiu A B C în care cunoaștem laturile b, a și diferența $B - A = 45°$.

Conform *teoremei* demonstrate (No. 57, P. II^a), avem:

(69) $$a = b\sqrt{2}\, sp\, A,$$

de unde:

$$\boxed{sp\, A = \frac{a}{b\sqrt{2}}}.$$

Odată găsit unghiul A, celelalte elemente se află ușor prin metode obicinuite.

Construcție. Fiindcă relația (69) se mai poate scri,

(70) $$a = [a + (b\sqrt{2} - a)]\, sp\, A,$$

rezultă că unghiul A se obține construind un triunghiu dreptunghic de catete a și $(b\sqrt{2} - a)$, fiindcă într'un astfel de triunghiu avem relația (70), conform *teoremei 1^a* (No. 49, P. II^a).

Unghiul opus catetei a în acest triunghiu dreptunghic ușor de construit, este unghiul A.

Acum, construirea triunghiului cerut A B C este o problemă cunoscută, întru cât îi cunoaștem laturile a, b și unghiul A.

Chestiuni de rezolvîrea triunghiurilor oarecare, cu ajutorul Trigonometriei patratice.

113. **Problemă.** *Să se rezolve și să se construiască un triunghiu* A B C, *cunoscând latura a și unghiurile asociate α, β $(\alpha, \beta < 45°)$.*

Soluție. Conform teoremei de la triunghiurile oarecare (No. 59, P. II^a), avem:

$$\boxed{2p = \frac{a}{sp\, \alpha}}.$$

Odată perimetrul $2p$ aflat, aceiași teoremă ne dă celelalte laturi, anume:

$$\boxed{b = 2p\, sp\, \beta}, \quad \boxed{c = 2p\, sp\, \gamma},$$

unde:

$$sp\, \gamma = 1 - sp\, \alpha - sp\, \beta = cp\, \alpha - sp\, \beta$$

dedusă din (36) (P. II^a).

Unghiurile A, B, C sunt date de relațiile,

$$\boxed{tg^2 \frac{A}{2} = \frac{tg(45° - \beta)\, tg(45° - \gamma)}{tg(45° - \alpha)}},$$

$$\boxed{tg^2 \frac{B}{2} = \frac{tg(45° - \gamma)\, tg(45° - \alpha)}{tg(45° - \beta)}},$$

$$\boxed{tg^2 \frac{C}{2} = \frac{tg(45° - \alpha)\, tg(45° - \beta)}{tg(45° - \gamma)}},$$

în baza formulelor (45) (No. 60, P. II^a). Ele se pot calcula și cu formulele obicinuite, care dau unghiurile în funcție de laturi, odată laturile aflate.

Construcție. Conform definiției unghiurilor asociate, dacă construim triunghiul dreptunghic D E F având cateta $D E = a$ și unghiul opus α, rezultă

$$D F = b + c, \text{ (fig. 32).}$$

Prelungind F D cu $G D = a$, rezultă $F G = 2p$. Acum de aceiași parte a lui F G ducem dreptele

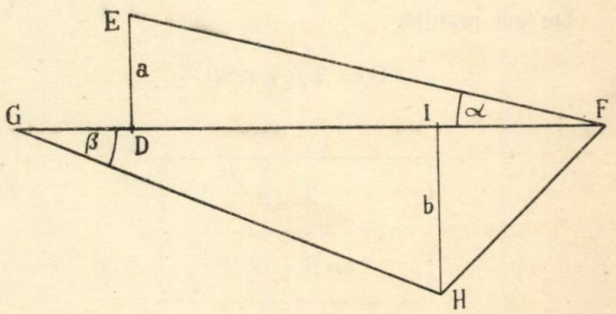


Fig. 32.

F H, G H care să formeze cu F G respectiv unghiuri de 45° și β, H fiind punctul lor de intersecție.

Scoborând din H perpendiculara H I pe F G, rezultă

$$\boxed{HI = b},$$

întru cât în triunghiul dreptunghic IGH, avem:

$$HI = 2p\ sp\beta.$$

Tot din figură reiasă,

$$\boxed{DI = 2p - a - b = c}.$$

Acum, construirea triunghiului cerut ABC, s'a redus la problema cunoscută, a construirii unui triunghiu căruia i se cunosc laturile.

114. **Problemă.** *Să se rezolve şi să se construiască un triunghiu* ABC, *cunoscând laturile a, b şi unghiul asociat* γ, $(\gamma < 45^0)$.

Soluţie. In şirul de rapoarte (35), din enunţul teoremei de la triunghiurile oarecare (No. 60, P. II[a]), avem:

$$\boxed{2p = \frac{a+b}{cp\,\gamma}}.$$

Odată perimetru $2p$ aflat, aceiaşi teoremă ne dă:

$$\boxed{c = 2p\ sp\gamma}.$$

Avem astfel cunoscute toate laturile, iar unghiurile se află în urmă prin metode obicinuite, în funcţie de laturi sau în funcţie de *unghiurile asociate.*

Construcţie. Construim întâi triunghiul dreptunghic DEF, având cateta $DF = a + b$ şi unghiul ascuţit alăturat γ. Din definiţia unghiurilor asociate, rezultă că $DE = c$.

Acum sunt cunoscute toate laturile triunghiului ABC, astfel că construcţia lui este o problemă bine cunoscută.

115. **Problemă.** *Să se rezolve şi să se construiască un triunghiu* ABC, *cunoscând laturile a, b şi unghiul asociat* α, $(\alpha < 45^0)$.

Soluţie. Din şirul de rapoarte (35) (No. 60, P. II[a]), deducem:

$$\boxed{sp\beta = \frac{b\ sp\alpha}{a}}, \qquad \boxed{2p = \frac{a}{sp\alpha}}.$$

Avem apoi,

$$\boxed{c = 2p\ sp\gamma},$$

unde:

$$sp\gamma = 1 - sp\alpha - sp\beta = cp\,\alpha - sp\beta.$$

Cunoscute astfel laturile a, b, c, unghiurile A, B, C se află prin mijloace obicinuite.

Construcţie. Construim triunghiul dreptunghic DEF având cateta $DE = a$ şi unghiul opus α. Din definiţia unghiurilor asociate, rezultă că $DF = b + c$.

Cum latura b este cunoscută, rezultă:

$$\boxed{c = DF - b}.$$

Triunghiul ABC se poate uşor construi, cunoscându-i laturile.

116. **Problemă.** *Intr'un triunghiu* ABC *se cunoaşte suma* $a + b = l$, *latura* c *şi unghiul asociat* α, $(\alpha < 45^0)$.

Se cere să se rezolve şi să se construiască triunghiul ABC.

Soluţie. Din şirul de rapoarte (35) (No. 60, P. II[a]) şi din enunţ, deducem:

$$\boxed{a = 2p\ sp\alpha = (l + c)\ sp\alpha}.$$

Având cunoscută latura a,

$$\boxed{b = l - a}.$$

Laturile a, b, c ale triunghiului ABC fiind astfel cunoscute, unghiurile lui se află în mod obicinuit.

Construcţie. Construim întâi triunghiul semidreptunghic DEF $(D = 45^0)$, având:

$DE = 2p = l + c$ şi unghiul $\sphericalangle E = \alpha$, (fig. 33).

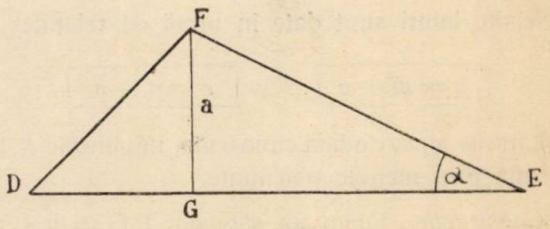


Fig. 33.

Ducem înălţimea FG şi avem:

$$\boxed{FG = a},$$

fiindcă în triunghiul dreptunghic GEF *teorema 1[a]* (No. 49, P. II[a]), ne dă:

$$FG = 2p\ sp\alpha.$$

Odată latura a construită, rezultă

$$\boxed{b = l - a}.$$

Construcţia triunghiului A B C este acum uşor de obţinut, cunoscându-i laturile.

117. **Problemă.** *Intr'un triunghiu* A B C *se cunosc sumele*

$$a + b = m, \quad a + c = n$$

şi unghiul asociat α, $(\alpha < 45^0)$. *Să se rezolve şi să se construiască triunghiul* A B C.

Soluţie. Din şirul de rapoarte (35) (No. 60, P. II^a), păstrăm numai relaţiile:

$$\frac{a+b}{cp\,\gamma} = \frac{a+c}{cp\,\beta} = 2p.$$

Conform enunţului şi a unei proprietăţi de la proporţii, mai putem scri:

$$(71) \qquad \frac{m}{cp\,\gamma} = \frac{n}{cp\,\beta} = 2p = \frac{m+n}{cp\,\gamma + cp\,\beta}.$$

Cum din aceleaşi relaţii (35) rezultă

$$cp\,\alpha + cp\,\beta + cp\,\gamma = 2,$$

urmează din (71):

$$2p = \frac{m+n}{2 - cp\,\alpha}.$$

Cunoscut astfel perimetrul $2p$, tot din (35) avem:

$$\boxed{a = 2p\,sp\,\alpha}.$$

Celelalte laturi sunt date în urmă de relaţiile:

$$\boxed{b = m - a}, \qquad \boxed{c = n - a}.$$

Laturile a, b, c odată cunoscute, unghiurile A, B, C se află prin metode obicinuite.

Construcţie. Luăm un segment $FG = m + n = a + 2p$ şi ducem dreapta F H care să formeze cu F G unghiul α, (fig. 34). Intr'un punct M a lui F G ridicăm o perpendiculară pe care luăm

$$MN = \frac{MG}{2}.$$

Unim G cu N, prelungim G N până întâlneşte pe F H în E şi coborâm perpendiculara E D pe F G.

Afirmăm că,

$$\boxed{DE = a}.$$

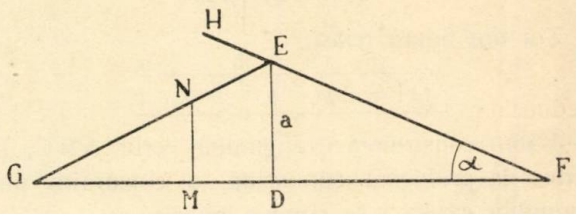


Fig. 34.

In adevăr, în triunghiul dreptunghic D E F, conform *teoremei 1^a* (No. 49, P. II^a), avem:

$$(72) \qquad DE = (DE + DF)\,sp\,\alpha.$$

Dar,

$$DF = FG - DG = a + 2p - DG, \quad DG = 2DE,$$

astfel că relaţia (72) devine:

$$DE = (a + 2p - DE)\,sp\,\alpha.$$

Impărţind această relaţie prin relaţia

$$a = 2p\,sp\,\alpha$$

dedusă din (35), obţinem

$$\frac{DE}{a} = \frac{a + 2p - DE}{2p} = \frac{a+2p}{a+2p},$$

deci:

$$DE = a.$$

Celelalte laturi se construesc uşor, fiindcă din enunţ rezultă:

$$\boxed{b = m - a}, \qquad \boxed{c = n - a}.$$

Triunghiul A B C se poate construi acum cu uşurinţă, cunoscându-i laturile.

118. **Problemă.** *Intr'un triunghiu* A B C *se cunoaşte latura* a, *unghiul asociat* α, $(\alpha < 45^0)$ *şi diferenţa* $B - C = 2\omega$. *Să se rezolve şi să se construiască triunghiul* A B C.

Soluţie. Prima din relaţiile (46) (No. 60, P. II^a), anume

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

ne dă ţinând seamă de enunţ:

$$\sin\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\omega.$$

De aci aflăm unghiul A şi în urmă din sistemul

$$\begin{cases} B + C = 180^0 - A \\ B - C = 2\omega, \end{cases}$$

deducem:

$$\boxed{B = 90^0 + \omega - \frac{A}{2}}, \quad \boxed{C = 90^0 - \omega - \frac{A}{2}}.$$

Laturile b, c se află acum prin mijloace obicinuite.

Construcţie. Construim întâi triunghiul dreptunghic D E F, având cateta D E $= a$ şi unghiul opus ei α.

Din definiţia unghiurilor asociate rezultă:

$$D F = b + c.$$

Am redus acum problema construirei triunghiului A B C la următoarea problemă:

Să se construiască un triunghiu, cunoscând baza a, diferenţa unghiurilor adiacente şi suma celorlalte două laturi.

Această problemă este însă soluţionată în „*Exercices de Géométrie*“, par *F. G. M.*, p. 412.

119. **Problemă.** *Să se rezolve şi să se construiască un triunghiu* A B C, *cunoscând raza* R *a cercului circumscris, unghiul* A *şi unghiul asociat* α, $(\alpha < 45^0)$.

Soluţie. Din prima relaţie (46) (No. 60, P. II^a), deducem

$$\cos\frac{B - C}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\alpha},$$

care ne permite a afla pe B — C. Cum, B + C = 180^0 — A, avem cu uşurinţă unghiurile B şi C.

Laturile le aflăm apoi cu formulele cunoscute:

$$\boxed{a = 2R\sin A}, \quad \boxed{b = 2R\sin B}, \quad \boxed{c = 2R\sin C}.$$

Construcţie. Construim cercul de rază R, ducem o coardă oarecare B M şi din M o altă coardă M C care să facă cu B M unghiul A. Coarda B C este evident egală cu a. Construim apoi triunghiul dreptunghic B C D, având unghiul opus catetei B C egal cu α. Din definiţia unghiurilor asociate rezultă, B D $= b + c$.

Construirea triunghiului A B C s'a redus la următoarea problemă cunoscută:

Să se construiască un triunghiu A B C, *cunoscând baza* B C $= a$, *unghiul opus* A *şi suma celorlalte două laturi,* $b + c$ = B D. („*Exercices de Géométrie*“, par *F. G. M.*, p. 411.)

120. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu* A B C, *cunoscând latura a, raza cercului înscris r şi unghiul asociat* α, $(\alpha < 45^0)$.

Soluţie. Din relaţiile (35) (No. 60, P. II^a), avem

$$2p = \frac{a}{sp\,\alpha},$$

deci:

$$b + c = 2p - a = \operatorname{cotg}\alpha,$$

cunoscut.

De altă parte, din *teorema 1^a* (No. 62, P. II^a,

$$r = h_a\, sp\,\alpha,$$

de unde:

$$h_a = \frac{r}{sp\,\alpha}.$$

Pentru triunghiul A B C *avem cunoscut:*

$$a, \quad b + c, \quad h_a.$$

Rezolvirea însă a unui triunghiu A B C cu aceste date este cunoscută (C. de P., p. 29, problema 18).

121. **Problemă.** *Să se rezolve un triunghiu* A B C, *cunoscând raza r a cercului înscris, unghiul* A *şi unghiul asociat* α.

Soluţie. Din *teorema 1^a* (No. 62, P. II^a), avem

$$r = h_a\, sp\,\alpha,$$

de unde:

$$h_a = \frac{r}{sp\,\alpha}.$$

In triunghiul A B C *avem cunoscut:*

$$r, \quad h_a, \quad A.$$

Rezolvirea unui astfel de triunghiu este însă cunoscută, (C. de P., p. 29, problema 20).

Alte probleme relative la triunghiuri.

122. **Problemă.** *In triunghiul* A B C *în care* A B $= 1$, A $< 90^0$ *şi* B $= 45^0$, *se duce dreapta* A D (D *fiind pe latura* B C), *astfel ca:*

$$A = 3 . \sphericalangle BAD.$$

Se proiectează ortogonal D *pe latura* AB *în* E *şi se notează* $DE = a$. *Să se găsească expresiunea înălţimei* BB′ *a triunghiului* ABC *în funcţie numai de* a. (G. M. vol. XXXII, problema 2431, p, 53.)

Soluţie. Construim fig, 35 conform enunţului, ducem înălţimea CC′ şi notăm $\sphericalangle BAD = \alpha$.

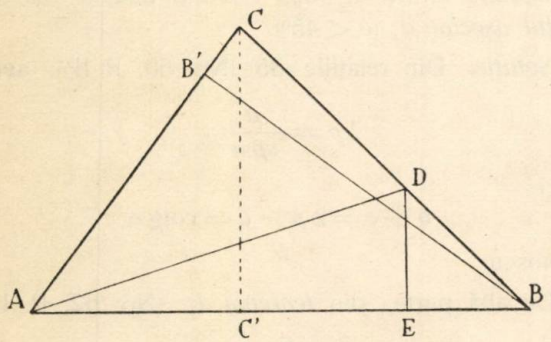


Fig 35.

Din definiţia *sinusului patratic* şi din enunţ, putem scri:

$$DE = sp\,\alpha = a, \qquad \overline{CC'} = sp\,3\alpha.$$

Acum observăm că,

$$2S = b . \overline{BB'} = \overline{AB} . \overline{CC'}.$$

De aci deducem:

$$\overline{BB'} = \frac{sp\,3\alpha}{b}. \tag{73}$$

Apoi din triunghiul dreptunghic C′AC, rezultă:

$$b = \sqrt{\overline{CC'}^2 + \overline{AC'}^2} = \sqrt{sp^2\,3\alpha + cp^2\,3\alpha}.$$

Rămâne să exprimăm $sp\,3\alpha$, $cp\,3\alpha$ în funcţie de $sp\,\alpha = a$.

Pentru aceasta folosim formulele (26′) şi (27′) (No. 21, P. II^a), anume:

$$sp\,3\alpha = \frac{3a - 6a^2 + 2a^3}{1 - 6a^2 + 4a^3}, \qquad cp\,3\alpha = \frac{1 - 3a + 2a^3}{1 - 6a^2 + 4a^3}. \tag{74}$$

Ridicând la patrat aceste relaţiuni şi adunându-le obţinem:

$$sp^2\,3\alpha + cp^2\,3\alpha = \frac{8a^6 - 24a^5 + 36a^4 - 32a^3 + 18a^2 - 6a + 1}{(1 - 6a^2 + 4a^3)^2} = \frac{(2a^2 - 2a + 1)^3}{(1 - 6a^2 + 4a^3)^2}.$$

Rezultă:

$$b = \frac{(1 - 2a + 2a^2)^{\frac{3}{2}}}{1 - 6a^2 + 4a^3}. \tag{75}$$

Inlocuind în (73) valorile lui $sp\,3\alpha$ şi b din relaţiile (74) şi (75), găsim:

$$\boxed{\overline{BB'} = \frac{3a - 6a^2 + 2a^3}{(1 - 2a + 2a^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

123. **Problemă.** *In triunghiul* ABC *în care unghiurile* B *şi* C *sunt ascuţite se duce din* D *mijlocul lui* BC *segmentele* $DE = l_1$, $DF = l_2$ *înclinate de* 45° *pe* BC. *(A se vedea fig. 16). Dându-se segmentele* l_1, l_2 *şi unghiul* B, *se cere să se rezolve triunghiul* ABC.

Soluţie. In virtutea *teoremei 2* (No. 66, P. II^a) avem:

$$\frac{l_1}{sp\,B} = \frac{l_2}{sp\,C}.$$

De aci deducem:

$$\boxed{sp\,C = \frac{l_2\,sp\,B}{l_1}}.$$

Avem astfel cunoscut unghiul C.

Acum considerăm triunghiul semidreptunghic DBE şi în virtutea *teoremei 1^a* (No. 54, P. II^a), avem:

$$l_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,sp\,B,$$

deci:

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{2}\,l_1}{sp\,B}}.$$

In triunghiul ABC avem acum cunoscut,

$$a, \quad B, \quad C$$

şi rezolvarea unui astfel de triunghiu este bine cunoscută.

124. **Problemă.** *In triunghiul* ABC *în care unghiurile* B *şi* C *sunt ascuţite, se duce din* D *mijlocul lui* BC *segmentele* $DE = l_1$, $DF = l_2$ *înclinate de* 45° *pe* BC. *(A se vedea fig. 16.)*

Cunoscând unghiurile B, C *şi suma* $l_1 + l_2 = l$, *se cere să se rezolve triunghiul* A B C.

Soluţie. In triunghiurile semidreptunghice D B E şi D C F, conform *teoremei 1ª* (No 54, P. II^a) avem:

$$l_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}\, sp\, B, \qquad l_2 = \frac{a}{2}\sqrt{2}\, sp\, C.$$

Inlocuind aceste valori în suma dată în enunţ şi rezolvind apoi în raport cu a, obţinem:

$$\boxed{a = \frac{l\sqrt{2}}{sp\, B + sp\, C}}.$$

Avem acum de rezolvat un triunghiu A B C, în care cunoaştem,

$$a,\quad B,\quad C,$$

problemă bine cunoscută.

125. **Problemă.** *In triunghiul* A B C *în care unghiurile* B *şi* C *sunt ascuţite se duce din* D *piciorul înălţimei* A D, *segmentele* $DE = l_1$, $DF = l_2$ *înclinate de* 45° *pe* B C. *(A se vedea fig. 17).*

Cunoscând segmentele l_1, l_2 *şi unghiul* B, *se cere să se rezolve triunghiul* A B C.

Soluţie. Conform *teoremei 3* (No. 67, P. II^a avem:

$$\frac{l_1}{cp\, B} = \frac{l_2}{cp\, C}.$$

De aci deducem,

$$\boxed{cp\, C = \frac{l_2\, cp\, B}{l_1}}$$

şi avem astfel cunoscut unghiul C.

Apoi din triunghiurile semidreptunghice D B E şi D C F, în virtutea *teoremei 1ª* (No. 54, P. II^a), avem

$$l_1 = \overline{DB}\sqrt{2}\, sp\, B, \qquad l_2 = \overline{CD}\sqrt{2}\, sp\, C,$$

de unde:

$$\overline{CD} = \frac{l_2}{\sqrt{2}\, sp\, C}, \qquad \overline{DB} = \frac{l_1}{\sqrt{2}\, sp\, B}.$$

Adunând aceste relaţii, obţinem:

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{l_1}{sp\, B} + \frac{l_2}{sp\, C}\right)}.$$

In triunghiul A B C cunoaştem astfel

$$a,\quad B,\quad C$$

şi problema rezolvirei triunghiului A B C este cunoscută.

126. **Problemă.** *In triunghiul* A B C *în care unghiurile* B *şi* C *sunt ascuţite, se duce din* D *piciorul înălţimei* A D, *segmentele* $DE = l_1$, $DF = l_2$ *înclinate de* 45° *pe* B C. *(A se vedea fig. 17).*

Cunoscând unghiurile B, C *şi suma* $l_1 + l_2 = l$, *se cere să se rezolve triunghiul* A B C.

Soluţie. Din triunghiurile semidreptunghice D A E şi D A F, conform *teoremei 1ª* (No. 54, P. II^a) avem:

$$l_1 = AD\sqrt{2}\, cp\, B, \qquad l_2 = AD\sqrt{2}\, cp\, C.$$

Inlocuim aceste valori în suma dată în enunţ şi apoi deducem:

$$AD = \frac{l}{\sqrt{2}\,(cp\, B + cp\, C)}.$$

Odată A D aflat, avem:

$$\boxed{a = AD\,(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)}.$$

Triunghiul A B C este acum uşor de rezolvat, cunoscând

$$a,\quad B,\quad C.$$

127. **Problemă.** *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare* A B C, *se cere să se stabilească relaţia*

$$a r + b r_1 + c r_2 = (r + p)(r_1 + r_2),$$

r_1 *şi* r_2 *fiind razele cercurilor înscrise în triunghiurile* B A D *şi* C A D, A D *fiind înălţimea din* A *şi presupunând că unghiurile* B *şi* C *nu sunt obtuze. Ce devine relaţia cerută în cazurile:*

1°. A = 90°; 2°. B = C;

3°. *Prin ce relaţie trebue înlocuită relaţia din enunţ în caz că unghiul* C *este obtuz.*

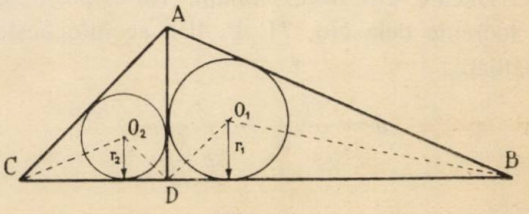


Fig. 36.

Soluţie. Construim fig. 36 conform enunţului.

In virtutea *teoremei* de la No. 71 (P. II[a]), avem:

$$(76) \qquad a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}} + \frac{r_2}{sp\frac{C}{2}}.$$

De altă parte, în triunghiul A B C, relaţiile (72), (No. 69, P. II[a]) anume

$$(77) \quad r = (r+p-b)\,sp\frac{B}{2} = (r+p-c)\,sp\frac{C}{2},$$

permit a afla pe $sp\frac{B}{2}$, $sp\frac{C}{2}$, valori pe care le înlocuim apoi în (76) şi obţinem:

$$a = \frac{r_1(r+p-b) + r_2(r+p-c)}{r}.$$

De aci deducem:

$$(78) \qquad \boxed{a r + b r_1 + c r_2 = (r+p)(r_1+r_2)}.$$

1°. Dacă $A = 90°$, ştim că

$$r = p - a \qquad \text{[relaţia (74), No. 70, P. II[a]]}$$

şi (78) devine

$$a r + b r_1 + c r_2 = (2p - a)(r_1 + r_2) = (b+c)(r_1+r_2),$$

de unde:

$$\boxed{a r = b r_2 + c r_1}.$$

Observare. Aceasta este tocmai relaţia cerută în enunţul problemei 1569 din „R. M. T", vol. XVII, p. 12 şi rezolvată pe altă cale în vol. XVIII, p. 91.

2°. Dacă $B = C$, atunci $c = b$

$$c = b, \qquad r_2 = r_1$$

şi relaţia (78) devine

$$a r + 2 b r_1 = (2r + a + 2b) r_1,$$

de unde:

$$(79) \qquad \boxed{a(r - r_1) = 2 r r_1}.$$

3°. Dacă C este obtuz, relaţia (76) conform aceleiaşi teoreme dela No. 71 (P. II[a]), se înlocueşte cu următoarea

$$a = \frac{r_1}{sp\frac{B}{2}} - \frac{r_2}{sp\frac{C}{2}}.$$

Substituind şi aci valorile lui $sp\frac{B}{2}$, $sp\frac{C}{2}$ deduse din relaţiile (77) de mai sus, găsim

$$a = \frac{r_1(r+p-b) - r_2(r+p-c)}{r},$$

de unde:

$$(80) \qquad \boxed{a r + b r_1 - c r_2 = (r+p)(r_1 - r_2)}.$$

128. **Problemă**. *Intr'un triunghiu* A B C *se duc bisectoarele* AA_1, BB_1, CC_1, *apoi se prelungesc:* A_1B *cu* $BM = AB$, B_1C *cu* $CN = BC$ *şi* C_1A *cu* $AP = CA$.

1°. *Să se arate că:*

$$\frac{A_1B}{A_1M} + \frac{B_1C}{B_1N} + \frac{C_1A}{C_1P} = 1.$$

2°. *Cunoscând rapoartele*

$$\frac{A_1B}{A_1M}, \frac{B_1C}{B_1N}, \frac{C_1A}{C_1P},$$

se cere să se calculeze unghiurile triunghiului A B C.

(R. M. T., problema 1782.)

Soluţie. 1°. Fie AA_1 bisectoarea din A triunghiului A B C şi $BM = AB$, (fig. 37). In triunghiurile A_1AB şi A_1AM observăm că putem scri respectiv:

$$\frac{A_1B}{A_1A} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin B}, \quad \frac{A_1A}{A_1M} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

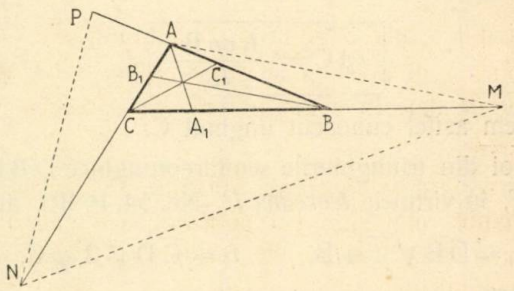


Fig. 37.

Inmulţind aceste relaţiuni şi având în vedere prima din relaţiile (39) (No. 60, P. II[a]), obţinem:

$$\frac{A_1B}{A_1M} = \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin B\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{B}\cos\frac{C}{2}} = sp\,\alpha$$

şi analog alte două relaţii.

Astfel avem:

$$(81)\quad \frac{A_1B}{A_1M} = sp\,\alpha, \quad \frac{B_1C}{B_1N} = sp\,\beta, \quad \frac{C_1A}{C_1P} = sp\,\gamma,$$

unde α, β, γ sunt unghiurile asociate triunghiului A B C, (No. 58, P. II[a]).

Dacă acum în relaţia (36) (No. 59, P. II[a]) înlocuim $sp\,\alpha$, $sp\,\beta$, $sp\,\gamma$ cu valorile lor din (81), obţinem:

$$(82)\quad \boxed{\frac{A_1B}{A_1M} + \frac{B_1C}{B_1N} + \frac{C_1A}{C_1P} = 1},$$

tocmai relaţia cerută în enunţ.

2°. Dacă se cunosc rapoartele

$$\frac{A_1B}{A_1M}, \quad \frac{B_1C}{B_1N}, \quad \frac{C_1A}{C_1P},$$

înseamnă, în virtutea relaţiilor (81), că se cunosc $sp\,\alpha$, $sp\,\beta$, $sp\,\gamma$, ceeace ne permite a afla unghiurile asociate α, β, γ.

Odată unghiurile α, β, γ calculate, relaţiile (45) (No. 60, P. II[a]), anume

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg}(45^0-\beta)\operatorname{tg}(45^0-\gamma)}{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^0-\beta)},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)\operatorname{tg}(45^0-\beta)}{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)},$$

ne permit a afla unghiurile triunghiului A B C.

Pentru a fi posibilă aflarea unghiurilor A, B, C, rapoartele date în enunţ trebuie să satisfacă condiţia (82).

Consecinţă importantă. Relaţiile (81) pe care le-am stabilit mai sus, permit a construi *unghiurile asociate α, β, γ ale triunghiului* A B C, printr'o altă metodă de cât acea dată prin definiţia de la No. 58, P. II[a]; iată această metodă:

Pentru a avea unghiul asociat α, ducem în triunghiul A B C *bisectoarea* AA_1, *(fig. 37) şi construim un triunghiu dreptunghic* D E F *având drept catete* D E = *segmentul* A_1B *şi* D F = *latura alăturată* A B *(sau* D E = *segmentul* A_1C *şi* D F = *latura alăturată* A C). *Unghiul opus catetei* D E *în triunghiul* D E F *astfel construit este unghiul asociat α.*

In adevăr, în triunghiul dreptunghic D E F, astfel aflat, în virtutea *teoremei I[a]* (No. 49, P. II[a]), avem:

$$DE = (DE + DF)\,sp\,\alpha,$$

sau

$$A_1B = (A_1B + AB)\,sp\,\alpha = A_1M\,sp\,\alpha, \quad \text{(fig. 37)}$$

care este prima relaţie din (81).

In triunghiul A B C ducând şi bisectoarele BB_1, CC_1, construim în mod analog apoi şi *unghiurile asociate β, γ.*

129. Pentru ca aplicaţiunile şi problemele de rezolvirea triunghiurilor aci tratate, prin metodele *Trigonometriei patratice,* să fie mai bine înţelese în spiritul lor, ar trebui ca ele să fie soluţionate şi prin metodele *Trigonometriei circulare* şi comparate cele două metode.

In acest scop, cele mai multe din chestiunile expuse le-am luat anume din diferite *„Culegeri de Trigonometrie“*, pe care le-am indicat de oarece acolo se găsesc şi soluţiile lor, date prin metodele obicinuite ale *Trigonometriei circulare.*

Am tratat cum s'a putut observa şi probleme de rezolvirea triunghiurilor, *cu totul noui,* în legătură cu *unghiurile asociate.*

(Va urma: PARTEA IV-a)

CARRÉS À PRODUITS MAGIQUES

PAR LE DR. ERICH STERN
(AMSTERDAM)

I.

Dans le No. 11 de la *Revista Matematică din Timişoara* XVIII (1939), p. 136, sous le No. 1737, le Dr. *A. Moessner* a posé le problème suivant:

Donner aux lettres A, B, C, D, E, F, G, H, J neuf valeurs numériques différentes, de sorte que les produits

$$A.B.C = D.E.F = G.H.J = A.D.G =$$

$$B.E.H = C.F.J = 1939,$$

ce qui revient à dire: Dans le carré *fig. 1,* le produit des termes de chaque rangée et de chaque colonne doit être 1939.

On sait que'on appelle *„magique“* un carré de nombres, dans lequel la somme des termes est la même sur chaque rangée, colonne et diagonale;

A	B	C
D	E	F
G	H	J

Fig. 1.

on dit que les rangées, colonnes et diagonales donnent la „constante magique“ ou la „somme magique“.

Si l'égalité des sommes n'est exigée que pour les rangées et les colonnes, le carré est appelé *semi-magique.*

Par analogie on peut dire que le problème posé revient à construire un carré de 9 nombres avec le *„produit semi-magique“* 1939

II.

Comme le nombre 1939 ne peut se partager que d'une seule façon en 3 facteurs différents (1.7.277), le problème n'a pas de solution en nombres entiers.

Les solutions, comportants des nombres irrationnels, sont trivials et n'entreront pas ici en considération.

Dans ce qui suit, nous exposerons un procédé, permettant d'obtenir autant de solutions qu'on voudra, toutes *en nombres rationnels.*

III.

Construisons un carré auxiliaire U d'après le

a_1	a_2	a_3
a_2	a_3	a_1
a_3	a_1	a_2

Fig. 2.

b_1	b_2	b_3
b_3	b_1	b_2
b_2	b_3	b_1

Fig. 3.

$a_1 b_1$	$a_2 b_2$	$a_3 b_3$
$a_2 b_3$	$a_3 b_1$	$a_1 b_2$
$a_3 b_2$	$a_1 b_3$	$a_2 b_1$

Fig. 4.

schéma de la *fig. 2,* et un autre V, d'après le schéma de la *fig.* 3. Si l'on multiplie les termes de U par ceux qui sont dans les cases correspondantes de V, on obtient le carré W (fig. 4), qui présente sur chaque rangée et chaque colonne le produit $a_1\, a_2\, a_3\, b_1\, b_2\, b_3$. Il faut donc avoir

$$a_1\, a_2\, a_3\, b_1\, b_2\, b_3 = 1939.$$

Pour que les 9 termes de W soient tous différents les uns des autres, il faut avoir:

$$a_1 \neq a_2 \neq a_3$$

$$b_1 \neq b_2 \neq b_3$$

et

$$\frac{a_t}{a_u} \neq \frac{b_v}{b_w}$$

en donnant aux indices t, u, v, w les valeurs 1, 2, 3 de toutes façons possibles. Par suite l'égalité

$$a_i = b_j$$

ne doit avoir lieu que pour une seule paire (i, j) des valeurs.

Il y a un nombre infini de valeurs positives rationnelles, qui peuvent être données aux éléments a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 et qui par leur introduction dans le carré W, fourniront des solutions du problème. Le *tableau* suivant en montre quelques exemples:

	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
I.	7	277	1	1/6	2	3
II.	7	277	1	1	1/2	2
III.	7	277	1	1	3	1/3
IV.	7	277	1	1	1/1939	1939
V.	1/6	7	277	1	2	3
VI.	1	7	277/6	1	2	3
VII.	1/6	277	1	2	3	7
VIII.	1/3	7	277	1/2	2	3
IX.	3	1/3	277	1/2	7	2

etc. etc.

7	$138\frac{1}{2}$	2
554	1	$3\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	14	277

Fig. 5.

Avec les nombres de No. II, par exemple, on obtient le carré *fig. 5.*

Ce carré (comme ceux fournis par les Nos. III et IV du tableau) présente la particularité de donner le produit 1939 également sur la diagonale gauche; la condition additionnelle est dans ce cas:

$$a_1\, a_2\, a_3\, (b_1)^3 = 1939.$$

IV.

L'exemple suivant exposera une autre méthode pour obtenir, à volonté, des solutions rationnelles.

Si l'on pose dans U (fig. 2),

$$a_1 = 4, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = 0$$

et dans V (fig. 3)

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 1,$$

et *additionne* les nombres de V avec les correspondants de U, on a le carré semi-magique *fig. 6,* dans lequel chaque rangée et chaque colonne (ainsi que la diagonale gauche) donne la *somme 1.*

4	−4	1
−2	0	3
−1	5	−3

Fig. 6.

Construisons maintenant un carré de 9 cases, composé de nombres de la forme 1939^z, en prenant pour z les valeurs des termes situés dans les cases correspondantes de fig. 6. Le carré *fig. 7,* ainsi obtenu, remplit les conditions posées

1939^4	$\frac{1}{1939^4}$	1939
$\frac{1}{1939^2}$	1	1939^3
$\frac{1}{1939}$	1939^5	$\frac{1}{1939^3}$

Fig. 7.

La *fig. 8* résulte d'une combinaison des deux méthodes. Le lecteur s'en rendra facilement compte, en décomposant le carré en deux carrés auxiliaires, dont l'un donne le produit semi-magique 277 et l'autre le produit semi-magique 7.

Les fig. 7 et 8 présentent encore le produit 1939 sur la diagonale gauche.

1939^4	$\frac{1}{1939^2 . 7^2}$	$\frac{7}{277}$
$\frac{1}{1939^2 . 277^2}$	1	$1939^3 . 277^2$
$\frac{277}{7}$	$1939^3 . 7^2$	$\frac{1}{1939^3}$

Fig. 8.

V.

L'égalité des produits de la fig. 7 se maintient, si l'on y remplace le nombre 1939 par un nombre quelconque P.

Si l'on veut construire un carré de 9 cases, *composé uniquement de nombres entiers positifs,* le preduit semi-magique P devra être de la forme $p.q.r.s$, avec

$$p \neq q \neq r \neq s \neq 1.$$

La plus petite valeur de P est alors $2.3.4.5 = 120$.

Pour faire un pareil carré, on peut prendre, par exemple, dans U et V:

$$a_1 = 1, \; a_2 = 5, \; a_3 = 3, \; b_1 = 4, \; b_2 = 1, \; b_3 = 2.$$

La multiplication des deux carrés auxiliaires ainsi composés donne la *fig. 9.*

4	5	6
10	12	1
3	2	20

Fig. 9.

3	4	18
36	6	1
2	9	12

Fig. 10.

Pour avoir *le produit* P *aussi sur les deux diagonales,* il faut que P soit de la forme $(f.g)^3$ et

$$f \neq g \neq 1.$$

On peut alors, par exemple, prendre

$$a_3 = f_1 \quad b_1 = g.$$

Si l'on a, en outre,

$$f \neq g^2 \quad \text{et} \quad g \neq f^2,$$

on peut donner aux éléments a_1 et a_2 les valeurs 1 et f^2, et aux éléments b_2 et b_3 les valeurs 1 et g^2, dans on ordre quelconque.

Si l'on pose $f=2$, $g=3$ (ou inversement), on a ainsi la plus petite valeur de P, soit $6^3=216$. On pourra alors, par exemple, prendre

$a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=2$, $b_1=3$, $b_2=1$, $b_3=9$

et on aura le carré *fig. 10*.

VI.

Les méthodes exposés s'étendent facilement à des carrés *d'ordre quelconque*. Voici, par exemple *fig. 11*, un carré de 16 cases, qui présente le produit magique 1939 sur chaque rangée, colonne et diagonale et qui résulte de la multiplication des deux carrés auxiliaires *fig. 12 et 13*

$\frac{1}{5}$	30	$3\frac{1}{2}$	$92\frac{1}{3}$
$138\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{5}$	5
2	$\frac{1}{2}$	1385	$1\frac{2}{5}$
35	$55\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	3

Fig. 11.

1	6	7	277
277	7	6	1
6	1	277	7
7	277	1	6

Fig. 12.

$\frac{1}{5}$	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	5
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Fig. 13.

$\frac{1}{1939^8}$	1	1939^2	1939^7
1939^6	1939^3	$\frac{1}{1939^3}$	$\frac{1}{1939^5}$
$\frac{1}{1939}$	$\frac{1}{1939^7}$	1939^8	1939
1939^4	1939^5	$\frac{1}{1939^6}$	$\frac{1}{1939^2}$

Fig. 14.

Fa *fig. 14* donne un exemple d'un autre genre, qui est construit par une méthode analogue à celle qui a donné le carré fig. 7.

Là encore, on peut remplacer le nombre 1939 par un nombre quelconque P.

Nous laissons au lecteur le soin d'étendre ces principes à de plus grands carrés et, en particulier, d'en construire avec des nombres entiers, donnant le même produit magique sur chaque rangée, colonne et diagonale. Les méthodes, que nous avons intentionellement exposés sur des exemples simples, peuvent aisément être variées de multiples façons.

Traduit de l'allemand par le Général E. Cazalas (Versailles).

NOTE MATEMATICE

6. — *Une solution des équations diophantiennes*

$x\,y\,z\,t+u^4=v^2$, $x\,y\,z\,t+u^4=v^4$, $x\,y\,z\,t+u^4=v^6$.

1. Pour la 1re équation, on a l'identité

$a\,(a+b)\,(a+2\,b)\,(a+3\,b)+b^4=(a^2+3\,a\,b+b^2)^2$.

2. Pour la 2e, résolvons encore $a^2+3\,a\,b+b^2=v^2$.

Nous avons les formules

$$\begin{cases} a=m^2-n^2 \\ b=2\,m\,n+3\,n^2 \\ v=m^2+3\,m\,n+n^2. \end{cases}$$

3. Pour la 3e, il faut résoudre $a^2+3\,a\,b+b^2=v^3$.

$$\begin{cases} a=m^3-3\,m\,n^2-3\,n^3 \\ b=3\,m^2\,n+9\,m\,n^2+8\,n^3 \\ v=m^2+3\,m\,n+n^2. \end{cases}$$

Exemples numériques.

$a=3$, $b=2$, resp. $m=3$, $n=2$.

1. $3.5.7.9+2^4=31^2$,
2. $5.29.53.77+24^4=31^4$,
3. $(-33).193.419.645+226^4=31^6$.

$a=4$, $b=3$, resp. $m=4$, $n=3$.

1. $4.7.10.13+3^4=61^2$ $\quad(=3721)$
2. $7.58.109.160+51^4=61^4$ $\quad(=13.845.841)$.
3. $(-125).559.1243.1927+684^4=61^6$
$\quad(=51.520.374.361)$.

A l'aide des formules générales que nous avons données pour résoudre $a^2 + kab + lb^2 = v^n$ [1], on peut résoudre toute équation de la forme

$$xyzt + u^4 = v^{2n}.$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

7. — *Vision trigonométrique d'un théorème important.*

1. Dans son remarquable Article „O teoremă importantă de Geometria elementară" *(Revista Matematica din Timişoara,* t. XVIII, No. 1, 15 Martie 1938) l'illustre M. le prof. *O. Ţino* démontre géométriquement le théorème suivant, vraiment important, et en déduit plusieurs notables proprietés du triangle comme, par exemple le théorème de *Menelaus* et de *Ceva.*

Si B A C *et* B′ A C′ *sont deux triangles ayant l'angle* A *en commun et si* Δ *est une droite quelconque conduite du sommet* A *qui coupe* B C *en* M *et* B′ C′ *en* M′ *on a*

$$(R) \qquad \frac{MB}{MC} : \frac{M'B'}{M'C'} = \frac{AB}{AC} : \frac{AB'}{AC'}.$$

Évidemment (voir loc. cit., p. 7) on peut enoncer ce théorème dans la manière suivantes

Si x A y *est un angle et si du sommet* A *on tire une droite fixe quelconque* Δ *(intérieurement ou extérieurement à l'angle) tout segment* B M C *qui coupe les côtés* A x, A y *et la droite* Δ *respectivement en* B, C, M, *donne*

$$(R) \qquad \frac{MB}{MC} : \frac{AB}{AC} = \text{constant}.$$

2. Nous donnerons maintenant un bref complément trigonométriques à l'article indiqué. A l'aide de la trigonométrie on peut compléter et démontrer immediatement la constance du double rapport R [2]

En effet si des points B, C on tirent les perpendiculaires B H; C K sur la droite Δ, on a

$$(R_1) \qquad \frac{MB}{MC} = \frac{BH}{CK} = \frac{AB \sin MAB}{AC \sin MAC},$$

d'où

$$(R_2) \qquad \frac{MB}{MC} : \frac{AB}{AC} = \frac{\sin MAB}{\sin MAC} = \text{constant}.$$

Remarques bibliographiques Nous avons rencontré (R_1) en *A. Amiot* „*Trattato di Geometria elem.*" tradotto da *G. Novi*, 29ª ed. Firenze, 1905, p. 406 et en *E. Rouché—Ch. de Comberousse* „*Traité de Géométrie*", I, p. 226, 1935, Gauthier-Villars, Paris (6ª ed. 1891). M. *Rouché* applique (R_1) pour la *démontration de l'invariabilité du rapport hanarmonique lorsque une transversal quelconque coupe un faisceau de quatre droites conduites par un même point* (p. 231).

3. On sait que deux droites conduites par le sommet d'un angle et symmétriques par rapport à la bissectrice de cet angle, on appelent *droites conjuguées isogonales*. Cela posé, à l'aide de (R_1) ou (R_2) on peut démontrer immediatement le théorème suivant attribué à *Pappo d'Alexandries.*

Si A M, A N *sont deux droites conjuguées isogonales par rapport à l'angle* A *du triangle* A B C *qui coupent en* M, N *le côté* B C, *on a*

$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Puis, à l'aide de ce théorème de *Pappo*, on peut faire une facile démontration du célèbre théorème attribué à *J. Steiner:*

Si trois droites conduites des sommets A B C *du triangle* A B C *concourent en un même point, leurs conjuguées isogonales concourent en un même point.*

4. **Lemme**. *Si par les sommets* A, B, C *d'un triangle* A B C *conduisons trois ceviennes concourant qui coupent en* M, N, P *les droites des côtés* B C, C A, A B, *on a*

$$(x) \qquad \frac{\sin MAB \cdot \sin NBC \cdot \sin PCA}{\sin MAC \cdot \sin NBA \cdot \sin PCB} = 1.$$

En effet, en vertu de (R_1) on a

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin MAB}{\sin MAC},$$

$$\frac{CN}{AN} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{\sin NBC}{\sin NBA},$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{\sin PCA}{\sin PCB},$$

---

[1]) Elles sont publiées dans Mathesis, mai 1938.

[2]) Les figures sont très faciles à tracer. Il n'est pas *nécessaire dorénavant la convention des signes,* donc en suite nous considérons valeurs absolues.

d'où, en multipliant membre à membre, en vertu du thèorème de *Ceva*, nous avons (*x*). (Voir *Rouché*, loc. cit., p. 226; *Amiot*, loc. cit., p. 406).

Théorème. *Les côtés* Y Z, Z X, X Y *du triangle* X Y Z *pédale de trois ceviennes concourant* A X, B Y, C Z *du trianple* A B C *sont coupés par trois autres ceviennes concourant* A *x*, B *y*, C *z en trois points* P, Q, R *qui sont les pieds de trois ceviennes concourant du triangle* X Y Z.

En effet, en vertu de (R_1) on a

$$\frac{PZ}{PY}=\frac{AZ}{AY}\cdot\frac{\sin x\,AB}{\sin x\,AC}\cdot$$

$$\frac{QX}{QZ}=\frac{BX}{BZ}\cdot\frac{\sin y\,BC}{\sin y\,BA},$$

$$\frac{RY}{RX}=\frac{CY}{CX}\cdot\frac{\sin z\,CA}{\sin z\,CB},$$

d'où, en multipliant membre à membre, nous avons, en vertu de (*x*),

$$\frac{PZ\,.\,QX\,.\,RY}{PY\,.\,QZ\,.\,RX}=1,$$

et, par suite, les droites X P, Y Q, Z R concourent en un même point. (Cet important théorème on trouve dans l'article de M. *Ţino*, p. 6.)

5. Dans le triangle A B C soit A P (*m*) une *cevienne potentielle de degré m* c'est-à-dire telle que

$$\frac{BP(m)}{CP(m)}=\frac{\overline{AB}^m}{\overline{AC}^m},\qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Puisque par (R_2) on a

$$\frac{BP(m)}{CP(m)}:\frac{AB}{AC}=\frac{\sin P(m)\,AB}{\sin P(m)\,AC},$$

il vient

$$\frac{\overline{AB}^{m-1}}{\overline{AC}^{m-1}}=\frac{BP(m-1)}{CP(m-1)}=\frac{\sin P(m)\,AB}{\sin P(m)\,AC}\cdot$$

VINCENZO G. CAVALLARO
Cefalù (Sicile)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLIV, Mai 1939. Comemorarea Profesorului *G. Ţiţeica* de către Cercul Matematic al Societăţii de Ştiinţe din Cluj. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1939, de *Gh. Th. Gheorghiu*. O problemă de construcţie (urmare şi sfârşit), de G-l *Gh. Buicliu*. Algebra lui Bacaloglu (urmare şi sfârşit), de *Florica Câmpan*. Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului de Algebră al Societăţii „G. M.". Note, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Mathematica*, volumul XV, 1939, Cluj. Über spharische Kurven, von *A. Hoborski*. Sur quelques limites supérieures des modules des zéros d'un polynome, par *Drag. Marcovic*. Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème plan de *Dirichlet*, par *Caius Jacob*. Contribution au catalogue de raccordement pour la carte photographique du ciel, par *Georges Bratu*. Sur un mouvement tautochrone, par *D. V. Ionesco*. Sur les surfaces minima applicables sur des surfaces de révolution, par *Georges Calugaréano*. Sur certains invariants homogènes de certaines fonctions entières, par *Georges Calugaréano* Invariants de prolongements et fonctionnelles analytiques, par *Georges Calugaréano*. Recherches sur l'équivalence, la négation et la réciprocité dans le calcul des propositions, par *Eugen Gh Mihăilescu*. Sur la sommabilité forte et la sommabilité absolue, par *I. Karamata*. Zur Erweiterung des Legendreschen Satzes auf Algebraische Zahlkörper, von *S. Lubelski*. Transformationstheorie der Komplexe [(11) (12)], von *Karl Stubecker*. Überwurzelabschätzungen bei algebraischen Gheichungen, von *H. Hadwiger*. Sur les zéros de quelques classes de polynomes, par *Nicola Obrechkoff*. Sur la mesurabilité au sens restreint des ensembles-image des fonctions multiformes ou uniformes de variables réelles, par *Alex. Froda*. L'Apolarité d'une forme binaire et d'un forme cubique. Application à la théorie des surfaces, par *Nicolas Abramescu*. Sur les fonctions inverses aux fonctions satisfaisant à la condition de *Baire*, par *W. Sierpinski*. Bemerkungen zu einigen Trennungsätzen von *M. Nicolesco* und *S Takahaski* für die nullstellen der Lösungen von Differentialgleichungen, von *E. Kamke*. Sur le mouvement relatif, par *D. V. Ionescu*. Notes de la Rédaction.

3. *Boletin Matematico*, anul XII, N-rile 3-4 5, Aprilie 1939, Buenos-Aires Generalizarea teoremelor lui *Pappus* şi *Guldin*, de *S. Sispanov*. Incercări de Geometria Analitică complexă, de *B. I. Baidaff* Ecuaţiuni de gradul al 2-lea cu rădăcini complexe şi determinarea lor grafică, de *A. Heurtley de la Riestra*. O notă de expansiune asupra teoremei lui *Heaviside*, de *B. C. Blanco*. Alte note, probleme propuse şi rezolvate.

4. *W. Sierpinski*. Sur les fonctions inverses aux fonctions satisfaisant à la condition de *Baise*. (Extras din Mathematica, vol. XV).

5. *W. Sierpinski*. Sur un ensemble à propriété λ. (Extrait du Tome XXXII, Fundamenta Mathematicae).

6. *S. Stoilov*. Leçons sur les Principes Topologigues de la Théorie des fonctions analytiques.

7. *Vicenzo G. Cavallaro* Nuove ricerche geometriche (Periodico di Matematica, anul XXX, 1915).

8. *Vicenzo G. Cavallaro*. Un nuovo solido. (Estratto dal Bollettino di Matematica, 1920).

9. *Vicenzo G. Cavallaro*. Due funzioni continue e due propositioni geometriche concomitanti. Sul quadrangolo. Appunti bibliografici. (Estratto dal Bolletino di Matematica, 1937).

10. *Vicenzo G. Cavallaro*. Storia della geometria dal triangolo in Italia. Sul segmento di *Brocard*. (Estratto dal Bollettino di Matematica).

11. *Vincenzo G. Cavallaro*. La dimonstrazione di Huggens del teorema pitagorico conformemente generalizzata sur un triangolo qualunque. (Estratto dal Periodico di Matematiche, 1939).

12. *Gheorghe Th. Gheorghiu.* Sur les réseaux à invariants égaux. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara).

13. *Jose Barral Souto.* Teoria racional de los sistemas economicos.

14. *J. Barral Souto.* Interpolation y ajustamento de la curva logistica generalizada.

15. *W. Prager.* On Hencky - Prandtl Lines.

16. *W. Prager.* On isotropic materials with continuous from elastic to plastic state.

17. *W. Prager.* Über Systeme von Kurvenkongruenzen. (Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, 1938.

PROBLEME REZOLVATE

1638. — *Fie* A B C D *un romb. Unindu-se mijlocul* P *al laturei* A B *cu vârfuriie* C *şi* D, *se obţine un triunghiu* P C D. *Unind mijloacele laturilor* P C *şi* P D *se obţine triunghiul* P M N. *Să se arate că:*

$$\text{aria}\,(A\,B\,C\,D) = 8\ \text{aria}\,(P\,M\,N).$$

LT. MARIN C I. VLAD

Notând cu Q mijlocului D C, observăm că P D, P C sunt diagonale în paralelogramele A Q, B Q deci triunghiurile A P D, D P Q; B P C, C P Q sunt egale; apoi triunghiul M N P are aria un sfert din aria triunghiului D P C. Atunci

$$\text{aria}\,(A\,B\,C\,D) = 2\ \text{aria}\,(D\,P\,C) = 8\ \text{aria}\,(P\,M\,N).$$

Soluţii date de d-nii: *Anastasescu M. M.* (Bucureşti), *Andrievici N.* (M-rea Dealu), *Aniţescu N, Bakonyi C.* (Timişoara), *Borneas M.* (Arad), *Buznea D. D.* (M-rea Dealu), *Cetăţeanu St.* (Bucureşti), *Constantinescu C. V.* (Tg. Mureş), *Cristescu Dan* (Braşov), *Dăscălescu S. H.* (Focşani), *Diaconescu D. I.* (T. Severin), *Gligor N. I.* (Arad), *Jidanu I. C.* (Beiuş). *Luca I. I.* (Arad), *Lupescu C.* (Roman), *Manuilă S. A.* (Bucureşti), *Marcuzon S. L.* (Iaşi), *Matei D. D.* (Iaşi), *Mihăileanu C. A.* (Arad), *Modâlcă S. E.* (T. Severin). *Mureşan O.* (Arad), *Negrea M.* (Brăila), *Popescu A., Popescu-Zorica N. A.* (Bucureşti), *Popoviciu G., Porumbescu T. D.* (Tg. Ocna), *Reischer L. H.* (Iaşi), *Şandor V., Săruleşteanu I. E.* (Bucureşti), *Slavov I.* (Bolgrad), *Solomon I. I.* (Iaşi), *Staicu I. N.*) M-rea Dealu), *Stamate I. I.* (Lugoj), *Ştefan C. T.* (T-Severin), *Ştefănescu F. M.* (Alba-Iulia), *Stoenescu D. M.* (M-rea Dealu), *Topalescu S. Gh.* (Tg. Mureş) *Vijelie G. E.* (M-rea Dealu), *Zigu S.* (Vaslui).

La această problemă elementară, n'au lipsit nici soluţiile trigonometrice ori analitice!

1753. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre care înmulţit cu 9 să se reproducă la patrat şi tot patrat perfect.*

I. I. STAMATE

Cu ocazia rezolvărei problemei 4322 în *Gazeta Matematică*, Vol. XL, pag. 41, am rezolvat următoarea problemă mai generală: *să se caute numerele* N *şi* N′, *unul răsturnatul celuilalt, astfel în cât*

$$N = p \times N'$$

p fiind un număr dat.

Luând $p < 10$ am găsit următoarele rezultate:

1°. p egal cu 2, 3, 5, 7, 8 nu avem nici o soluţie.

2°. $p = 1$ avem pentru N soluţiuni de forma

$$a\,a\,.\,.\,a\,a;\quad a\,b\,.\,.\,l\,k\,l\,.\,.\,b\,a;\quad a\,b\,.\,.\,l\,k\,k\,l\,.\,.\,b\,a.$$

3°. $p = 4$ se găsesc următoarele soluţiuni fundamentale

$$N = 8712 = 4 \times 2178$$

$$N = 87912 = 4 \times 21978$$

$$N = 8799\,..\,9912 = 4 \times 2199\,..\,9978.$$

4°. $p = 6$ avem soluţia fundamentală

$$N = 5604390 = 6 \times 0934065.$$

5°. Când $p = 9$, găsim soluţia fundamentală

$$N = 2801 = 9 \times 1089.$$

Dacă se notează cu N_i numărul ce se formează scriind pe N de i ori unul după altul, atunci e uşor de văzut că din fiecare din soluţiile fundamentale de la 1°, 2°, 3°, 4°, 5° se pot forma infinitate de soluţii de forma

$$N_i\,0_k\,N_j\,0_x\,N_y\,..$$

intercalând pe O de un număr oare care de ori între diverse grupe N_i.

Calea urmată pentru găsirea acestor numere a fost acea dată de d-l *I. Ionescu* în rezolvarea problemei 2899 din *Gazeta Matematică* Vol. XXXII, pag. 59, cu enunţul:

Răsturnatul unui număr întreg nu poate fi egal cu jumătatea acelui număr.

Pentru cazul problemei 1753 a d-lui *I. I. Stamate*, se iau soluţiile de la 5° precedent şi se observă că

$$9801 = 99^2 = 9 \times 1089 = 33^2.$$

Iată acum şi o soluţie directă, independentă de cunoaşterea problemelor citate din *Gazeta Matematică*.

Trebue să avem

$$(1) \qquad N^2 = a\,b\,c\,d = 9 \times d\,c\,b\,a$$

care arată că $a\,b\,c\,d$ se divide prin 9, deci

$$a+b+c+d=9\,m,$$

dar atunci $d\,c\,b\,a$ se divide prin 9 şi prin urmare $a\,b\,c\,d$ se divide prin 81 şi vom avea

(2) $$a\,b\,c\,d=81\times m^2.$$

Insă

$$1000<a\,b\,c\,d=81\times m^2<9999$$

⁂ (3) $$12<m^2<123.$$

Din (1) se scoate

$$1000a+100b+10c+d=9000\,d+900c+90b+9a$$

⁂ $$991a+10b=8999d+890c$$

⁂ $$990a+11b+a-b=8998d+891c+d-c,$$

care arată că

$$a+c-(b+d)=11\times p$$

ceea ce înseamnă că $a\,b\,c\,d$ este multiplu de 11. Deci m^2 se divide cu 11. Dar din (3) se vede că singurul patrat multiplu de 11 este 121, aşa că

$$a\,b\,c\,d=81\times 121=9801=99^2$$

şi $$d\,c\,b\,a=9\times 1081=9\times 33^2.$$

G-l Gh. B.

PROBLEME PROPUSE

1776. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, ştiind că dacă punem cifra 1 înaintea lui obţinem un patrat perfect de cinci cifre.

C-TIN I. JIDANU

1777. — Să se găsească patratele perfecte de forma $a\,a\,a\,b\,c$, unde $a=2\,c$.

N. ANITESCU

1778. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} a\,x\,(y+b)^2=b\,y\,(x+a)^2 \\ a\,x+b\,y=a^4-b^4. \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

1779. — Să se calculeze derivata funcţiunii

$$y=\frac{\sqrt{1-x^4}+\sin x}{x^2+\cos x},$$

şi să se arate că această derivată se poate scri sub forma:

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^4}-2\,x}{\sqrt{1-x^4}\,(1-\sqrt{1-x^4}\sin x+x^2\cos x)}.$$

GH TH. GHEORGHIU

1780 — Să se arate că dreptele lui *Simson* a unui punct arbitrar M al cercului circumscris unui exagon $A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5\,A_6$, prin raport la triunghiurile $A_1\,A_3\,A_5$ şi $A_2\,A_4\,A_6$ sunt perpendiculare.

Să se afle locul punctului lor de intersecţie.

V. THÉBAULT

1781. — Se consideră toate triunghiurile A B C care au picioarele D şi E a două înălţimi fixe, iar vârful A mobil pe o perdendiculară la D E Să se găsească:

1°. Locul vârfului A, B, C.

2°. Locul ortocentrului, al centrului de greutate şi al centrului celor 9 puncte al triunghiurilor A B C.

3°. Locul mijloacelor laturilor acestor triunghiuri.

Să se arate apoi că se poate construi un triunghiu A B C când se cunosc punctele D, E şi centrul cercului circumscris triunghiului A B C.

G-L GH. BUICLIU

1782. — Intr'un triunghiu A B C se duc bisecoarele interioare $A\,A_1$, $B\,B_1$, $C\,C_1$, apoi se prelungesc: $A_1\,B$ cu $B\,M=A\,B$, $B_1\,C$ cu $C\,N=B\,C$ şi $C_1\,A$ cu $A\,P=C\,A$.

1°. Să se arate că avem

$$\frac{A_1\,B}{A_1\,M}+\frac{B_1\,C}{B_1\,N}+\frac{C_1\,A}{C_1\,P}=1.$$

2. Cunoscând rapoartele

$$\frac{A_1\,B}{A_1\,M},\ \frac{B_1\,C}{B_1\,N},\ \frac{C_1\,A}{C_1\,P},$$

se cere să se calculeze unghiurile triunghiului A B C.

V. ALACI

1783. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^2 x\,(5-\cos^2 x)-\sin 3\,x+\cos 2\,x-\sin x=0.$$

NICOLAE I. CRISTEA

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Boiangiu D. (1674, 1681, 1704, 1729, 1752, 1753, 1760); *Buznea D. Dinu* (P., 1703, 1717); *Cherţman S. M.* (1681, 1682, 1752, 1753, 1757, 1758, 1760, 1763, 1768, 1775); *Goga Fl.* (P., 1734, 1751, 1773, 1774); *Hermann Carol* (1514, 1554, 1690. 1720, 1760); *Jidanu C-tin* (1290, 1315, 1319, 1333, 1341, 1342, 1443, 1446, 1447, 1701, 1713, 1768, 1771); *Mahrenholz Johannes* (1708, 1715, 1721, 1732, 1734, 1743, 1746, 1748, 1757, 1758, 1761, 1762, 1766, 1769, 1771, 1774, 1775); *Papadopol Elena* (1631, 1689); *Săruleşteanu I. Emanoil* (1683); *Staicu I. N.* (1688, 1693, 1702, 1729, 1748); *Stoinescu D. Mirel* (1698, 1699); *Văduva F Marin* (P., 1681, 1682, 1684, 1690, 1693, 1696, 1697, 1699, 1703, 1704, 1707, 1729, 1746, 1753, 1758, 1760, 1768, 1775).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XII-LEA

care a început în Martie 1938.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XII, care a inceput în Martie 1939, s'a primit până acum la Redacţia „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.

A APARUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identităţile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry*, sunt rugaţi a intra în corespondenţă cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XVIII, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XIX, care a început la 15 Martie 1939.

ANUL XIX IULIE — AUGUST 1939 NO. 5-6

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI: TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. NOTE MATEMATICE: 8, 9, 10.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1371, 1502, 1597, 1657, 1673.
5. PROBLEME PROPUSE: 1784-1791.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Cu plăcere anunţăm că începând dela 15 Iulie 1939, mai fac parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara" şi următorii valoroşi şi vechi corespondenţi de o fecundă activitate:

1°. **Gheorghiu Th. Gh.**, *Doctor în Matematici, Asistent pe lângă catedra de Analiză Matematică dela Şcoala Politechnică din Bucureşti, Profesor la liceul* Schewitz-Thierrin; *Str. Vatra Luminoasă No. 55, Bucureşti IV.*

2°. **Mereuţă Emilian**, *Licenţiat în Matematici, Str. Vatra Luminoasă 89, Bucureşti IV.*

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208. sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XIX -- No 5—6 TIMISOARA, IULIE—AUGUST 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

DE
V. ALACI
PROFESOR

(urmare)

PARTEA IV-a

CHESTIUNI DIVERSE IN LEGĂTURĂ CU FUNCȚIUNILE PATRATICE.

129. In acest ultim capitol vom generaliza unele formule din P*artea I*ª și vom trata apoi câteva chestiuni, cu totul variate, pentru a invedera diversitatea domeniilor în care funcțiunile patratice au drept să ocupe locul lor meritat.

Aplicațiuni mult mai numeroase lăsăm să se întrevadă și am fi foarte mulțumiți dacă alte energii ar activa în această direcție, aducând noui contribuțiuni care să se însumeze celor cuprinse în lucrarea prezentă.

Generalizarea formulelor de adițiune și înmulțire.

130. Formulele de adițiune de la No. 20 și No. 21 (P. Iª) și acelea de înmulțire de la No. 22 (P. Iª) le vom generaliza în cele ce urmează, soluționând următoarele două probleme:

131. **Problemă.** *Dându-se arcele* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *se cere să se calculeze*

$$sp(a_1+a_2+\cdots+a_n), \qquad cp(a_1+a_2+\cdots a_n)$$

în funcție de sinusurile și cosinusurile patratice ale arcelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Soluție. Pornim de la relațiile cunoscute

$$(1)\quad \frac{sp(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{cp(a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \operatorname{tg}(a_1+a_2+\cdots+a_n) = \frac{P_1-P_3+P_5-P_7+\cdots}{1-P_2+P_4-P_6+\cdots},$$

unde P_i înseamnă suma produselor câte i în toate modurile posibile ale tangentelor arcelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$, adică:

$$P_i = \sum \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 \ldots \operatorname{tg} a_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă multiplicăm numărătorul și numitorul ultimei fracții din (1) cu produsul $cp\,a_1\, cp\,a_2 \ldots cp\,a_n$, simplificăm și notăm pentru prescurtare

$$(2)\quad S_i = \sum sp\,a_1\, sp\,a_2 \ldots sp\,a_i\, cp\,a_{i+1} cp\,a_{i+2} \ldots cp\,a_n,$$

relația (1) devine:

$$(3)\quad \frac{sp(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{cp(a_1+a_2+\cdots+a_n)} = \frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\cdots}{cp\,a_1\, cp\,a_2 \ldots cp\,a_n - S_2+S_4-S_6+\cdots}.$$

Acum vom considera următoarele patru cazuri care se impun:

1°. *Cazul* $2k\pi \leqq a_1+a_2+\cdots+a_n \leqq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

In acest caz, suma între numărătorul și numitorul fracției din primul membru din (3) este egală cu 1, conform relației (4) (P. Iª), astfel că în virtutea unei proprietăți a proporțiilor, deducem din (3):

$$(4)\quad \boxed{sp(a_1+a_2+\cdots+a_n) = \frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\cdots}{cp\,a_1\, cp\,a_2 \cdots cp\,a_n + S_1-S_2-S_3+S_4+S_5-\cdots},}$$

$$\boxed{cp(a_1+a_2+\cdots+a_n) = \frac{cp\,a_1\, cp\,a_2 \ldots cp\,a_n - S_2+S_4-S_6+\cdots}{cp\,a_1\, cp\,p_2 \ldots cp\,a_n + S_1-S_2-S_3+S_4+S_5-\cdots}.}$$

2°. *Cazul* $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leq a_1+a_2+\cdots+a_n\leq(2k+1)\pi$, $\quad(k=0,1,2,\ldots)$.

Ţinând seamă de prima relaţie din (4') (P. I^a) care convine în acest caz şi aplicând în (3) o proprietate cunoscută a proporţiilor, obţinem:

$$(5)\qquad \boxed{sp(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\cdots}{-cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n+S_1+S_2-S_3-S_4+S_5+S_6-\cdots}},$$

$$\boxed{cp(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n-S_2+S_4-S_6+\cdots}{-cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n+S_1+S_2-S_3-S_4+S_5+S_6-\cdots}}.$$

3°. *Cazul* $(2k+1)\pi\leq a_1+a_2+\cdots+a_n\leq(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$, $\quad(k=0,1,2,\ldots)$.

In virtutea formulei a 2^a din (4') (P. I) şi a unei proprietăţi a proporţiilor, deducem din (3):

$$(6)\qquad \boxed{sp(a_1+a_2+\cdots+a_n)=-\frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\cdots}{cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n+S_1-S_2-S_3+S_4+S_5-\cdots}},$$

$$\boxed{cp(a_1+a_2+\cdots+a_n)=-\frac{cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n-S_2+S_4-S_6+\cdots}{cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n+S_1-S_2-S_3+S_4+S_5-\cdots}}.$$

4°. *Cazul* $(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\leq a_1+a_2+\cdots+a_n\leq 2(k+1)\pi$, $\quad(k=0,1,2,\ldots)$.

In virtutea formulei a 3^a din (4') (P. I^a) şi a unei proprietăţi a proporţiilor, deducem din (3):

$$(7)\qquad \boxed{sp(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\cdots}{cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n-S_1-S_2+S_3+S_4-S_5-S_6+\cdots}},$$

$$\boxed{cp(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n-S_2+S_4-S_6+\cdots}{cp\,a_1\,cp\,a_2\ldots cp\,a_n-S_1+S_2+S_3+S_4-S_5-S_6+\cdots}}.$$

Formulele (4), (5), (6) şi (7) soluţionează enunţul problemei.

Se observă că formulele (6) şi (7) au membrii al 2^{lea} egali şi de semne contrare respectiv cu a celor din formulele (4) şi (5).

132. **Problemă.** *Să se calculeze* $sp\,n\,a$ *şi* $cp\,n\,a$ *(n întreg, pozitiv) în funcţie de sinusul şi cosinusul patratic al arcului a.*

Soluţie. Dacă în formulele (4), (5), (6), (7) stabilite în problema precedentă, luăm

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=a$$

şi observăm că expresiunile S_i din (2) devin

$$S_i=\sum sp^i a\,cp^{n-i}a=C_n^i\,sp^i a\,cp^{n-i}a,\qquad(i=1,2,\ldots,n),$$

atunci cazurilor 1°, 2°, 3°, 4° considerate în problema precedentă şi formulelor de acolo le corespund cazurile şi formulele ce urmează:

1°. *Pentru* $2k\pi\leq n\,a\leq 2k+\frac{\pi}{2}$, $\quad(k=0,1,2,\ldots)$, *formulele (4) devin:*

$$sp\,n\,a=\frac{C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}a-C_n^3\,sp^3a\,cp^{n-3}\,a+C_n^5\,sp^5a\,cp^{n-5}a-\ldots}{cp^n a+C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}a+\cdots},$$

(8)

$$cp\,n\,a=\frac{cp^n\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}+C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a-\cdots}{cp^n\,a+C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a+C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}a+\cdots}.$$

2°. *Pentru* $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqq n\,a\leqq(2k+1)\pi$, $(k=0,1,2,\ldots)$, *formulele* (5) *devin*:

$$sp\,n\,a=\frac{C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a+C_n^5\,sp^5\,a\,cp^{n-5}\,a-\cdots}{-cp^n a+C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a+C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a-C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a+\cdots},$$

(9)

$$cp\,n\,a=\frac{cp^n\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a+C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a-\cdots}{-cp^n\,a+C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a+C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a-C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a+\cdots}.$$

3°. *Pentru* $(2k+1)\pi\leqq n\,a\leqq(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$, $(k=0,1,2,\ldots)$, *formulele* (6) *devin:*

$$sp\,n\,a=-\frac{C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a+C_n^5\,sp^5\,a\,cp^{n-5}\,a-\cdots}{cp^n\,a+C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a+\cdots},$$

(10)

$$cp\,n\,a=-\frac{cp^n\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a+C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a-\cdots}{cp^n\,a+C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a+\cdots}.$$

4°. *Pentru* $(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\leqq n\,a\leqq 2(k+1)\pi$, $(k=0,1,2,\ldots)$, *formulele* (7) *devin:*

$$sp\,n\,a=\frac{C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a-C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a+C_n^5\,sp^5\,a\,cp^{n-5}\,a-\cdots}{cp^n\,a-C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a+C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a+C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a-\cdots},$$

(11)

$$cp\,n\,a=\frac{cp^n\,a-C_n^2\,sp\,a\,cp^{n-2}\,a+C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a-\cdots}{cp^n\,a-C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a+C_n^3\,sp^3\,a\,cp^{n-3}\,a+C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a-\cdots}.$$

Observare. Formulele (8), (9), (10) şi (11) s'ar mai fi putut stabili şi direct pornind de la relaţiile cunoscute

$$\frac{sp\,n\,a}{cp\,n\,a}=tg\,n\,a=\frac{C_n^1\,tg\,a-C^3\,tg^3\,a+C_n^5\,tg^5\,a-\cdots}{1-C_n^2\,tg^2\,a+C_n^4\,tg^4\,a-\cdots}=$$

$$=\frac{C_n^1\,sp\,a\,cp^{n-1}a-C_n^3\,sp^3a\,cp^{n-3}a+C_n^5\,sp^5\,cp^{n-5}a-\cdots}{cp^n\,a-C_n^2\,sp^2\,a\,cp^{n-2}\,a+C_n^4\,sp^4\,a\,cp^{n-4}\,a-\cdots}$$

şi folosind acelaşi procedeu ca în problema precedentă.

ECUAŢIUNI IN TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

133. Vom trata câteva clase de ecuaţiuni trigo-

nometrice patratice cu una şi două necunoscute, ce le putem întâlni în aplicaţiuni.

Ecuaţii cu o singură necunoscută.

134. *Fie de rezolvat o ecuaţie de forma:*

(12) $$f(sp\,x, cp\,x) = 0.$$

Soluţie. Din cauză că între $sp\,x$ şi $cp\,x$ nu există o relaţie unică când arcul x este în diferite cadrane [1], se impune a găsi pe rând arcele x din cadranele I, II, III, IV, care satisfac ecuaţia dată. Un astfel de arc găsit, i se poate adăoga $2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ pentru a avea soluţii generale.

In adevăr, ecuaţia dată, prin substituţia

(13) $$sp\,x = t,$$

se transformă respectiv, ţinând seamă de formulele (4) şi (4′) (P. I^a), în ecuaţiile algebrice:

(14) $f(t, 1-t) = 0$, (15) $f(t, t-1) = 0$.

(16) $f[t, -(1+t)]$, (17) $f(t, 1+t) = 0$.

Se caută apoi rădăcinele pozitive ale ecuaţiilor (14) şi (15) cuprinse în intervalul închis (0,1) şi rădăcinele negative ale ecuaţiilor (16) şi (17) cuprinse în intervalul închis $(-1, 0)$.

Dacă α este o astfel de rădăcină, se rezolvă în urmă ecuaţia

$$sp\,x = \alpha,$$

alegându-se pentru x, arcul din cadranele I, II, III sau IV, după cum α considerat este respectiv rădăcină admisibilă pentru ecuaţiile (14), (15), (16) şi (17).

Observare. Natural că în ecuaţia (12) s'ar putea face şi substituţia

$$cp\,x = t,$$

procedându-se ca mai sus.

135. *Fie de rezolvat o ecuaţie de forma:*

(18) $$f(sp\,x, cp^2\,x) = 0.$$

Soluţie. Şi în acest caz se face substituţia

$$sp\,x = t,$$

numai că ecuaţiile (14) şi (15) devin identice, tot astfel şi ecuaţiile (16) şi (17).

[1]) Vezi relaţiunile (4) ş (4′), (P. I^a).

Avem de rezolvat acum numai ecuaţiile

(19) $f[t, (1-t)^2] = 0$, (20) $f[t, (1+t)^2] = 0$.

Căutăm rădăcinele pozitive ale ecuaţiei (19) cuprinse în intervalul închis (0, 1) şi rădăcinele negative ale ecuaţiei (20) cuprinse în intervalul închis $(-1, 0)$.

Dacă $0 \leq \alpha \leq 1$ este o rădăcină a ecuaţiei (19), se caută arcele x din cadranul I şi II, care să satisfacă ecuaţia:

$$sp\,x = \alpha.$$

De asemeni, dacă $-1 \leq \beta \leq 0$ este o rădăcină a ecuaţiei (20), se caută arcele x din cadranul III şi IV care să satisfacă ecuaţia:

$$sp\,x = \beta.$$

Aceste soluţii mărite cu $2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ne dau toate soluţiile ecuaţiei (18).

Observare. Pentru o ecuaţie de forma

$$f(sp^2\,x,\ cp\,x) = 0$$

se face substituţia $cp\,x = t$ şi se procedează ca mai sus.

136. *Fie de rezolvat o ecuaţie de forma:*

(21) $$f(sp^2\,x,\ cp^2\,x) = 0.$$

Soluţie. Această ecuaţie intră evident în clasa ecuaţiilor (18) studiate la No. 135, putem însă folosi următoarele consideraţii simplificatoare.

Observăm astfel că odată ce am găsit un arc α în primul cadran soluţie a ecuaţiei (21), toate arcele de forma

$$x = k\pi \pm \alpha, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

sunt soluţii a ecuaţiei (21), fiindcă în baza relaţiilor (2), (3), (1) (P. I^a), având

$$sp^2(\pi - \alpha) = sp^2\,\alpha, \qquad cp^2(\pi - \alpha) = cp^2\,\alpha,$$

$$sp^2(\pi + \alpha) = sp^2\,\alpha, \qquad cp^2(\pi + \alpha) = cp^2\,\alpha,$$

$$sp^2(2\pi - \alpha) = sp^2\,\alpha, \qquad cp^2(2\pi - \alpha) = cp^2\,\alpha,$$

ecuaţia (21) rămâne neschimbată când în loc de α se ia $k\pi \pm \alpha$.

Ori dacă x este presupus în primul cadran, substituţia

$$sp\,x = t$$

transformă ecuaţia (21) în următoarea ecuaţie algebrică:

(22) $$f[t^2, (1-t)^2] = 0.$$

Căutăm deci rădăcinele pozitive ale acestei ecuații cuprinse în intervalul închis (0, 1). Dacă β este o astfel de rădăcină, găsim în urmă arcele α din primul cadran soluții ale ecuației

$$sp\, x = \beta$$

și conform celor expuse rezultă că

$$\boxed{x = k\pi \pm \alpha}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{21'}$$

cuprinde totalitatea soluțiilor ecuației (21).

Observare. Rezolvarea ecuației (21), necesită astfel rezolvarea singurei ecuații algebrice, (22).

Aplicații. Vom trata ca aplicații a teoriei expuse, numai următoarele două probleme:

137. **Problemă.** *Să se rezolve ecuația:*

$$sp^3 x + cp\, x = 0. \tag{23}$$

Soluție. Facem substituția

$$sp\, x = t$$

și ecuațiile (14), (15), (16) și (17) din teoria expusă la No. 134 devin respectiv în cazul ecuației (23):

$$t^3 - t + 1 = 0, \tag{14'}$$

$$t^3 + t - 1 = 0 \tag{15'}$$

$$t^3 - t - 1 = 0, \tag{16'}$$

$$t^3 + t + 1 = 0. \tag{17'}$$

Trebuie să rezolvim aceste ecuații și să reținem numai rădăcinele care ne interesează.

Dar privind ecuația (23) observăm că nu există arce în primul și al 3lea cadran care s'o satisfacă, astfel că nu vom cerceta ecuațiile (14') și (16').

Rămâne să soluționăm numai ecuațiile (15') și (17').

1°. *Rezolvirea ecuației* (15'). Derivata ecuației (15') având rădăcinele imaginare, rezultă că ecuația (15') are numai o singură rădăcină reală, evident pozitivă.

Dacă însemnăm

$$f(t) = t^3 + t - 1,$$

observăm că

$$f(0) = -1, \qquad f(1) = 1,$$

deci ecuația (15') are o rădăcină cuprinsă în intervalul (0, 1).

Având încă

$$f(0{,}5) = -0{,}375,$$

înseamnă că ecuația (15') are rădăcina sa reală cuprinsă între 0,5 și 1.

Aplicând mai departe metodele de aproximație cunoscute, găsim că ecuația (15') are rădăcina

$$t = 0{,}68231$$

cu cinci zecimale exacte.

După cele ce știm, vom căuta acum arcul x din primul cadran, astfel ca

$$sp\, x = 0{,}68231.$$

Căutând în tabela 2 (No. 17, P. Ia), ce cuprinde valorile naturale ale *sinusurilor patratice,* găsim:

$$0{,}68198 \ldots\ldots 65^0$$

$$0{,}68231 \ldots\ldots x$$

$$0{,}68363 \ldots\ldots 65^0{,}10'.$$

De aci deducem:

$$x = 65^0 + \left(\frac{33 \times 10}{165}\right)' = 65^0{,}2'.$$

Ecuația (23) admite deci soluția generală:

$$\boxed{x = 2k\pi + 65^0{,}2'}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{23'}$$

2°. *Rezolvirea ecuației* (17'). Dacă în ecuația (17') înlocuim pe t prin $-t$, obținem ecuația (15').

Rezultă de aci că ecuația (17') admite singura rădăcină reală,

$$t = -0{,}68231.$$

Să căutăm acum arcul x din cadranul al 4lea, astfel ca;

$$sp\, x = -0{,}68231.$$

Această ecuație se mai poate scri însă

$$sp(2\pi - x) = 0{,}68231 = sp\, 65^0{,}2',$$

cum reiasă din cele de mai sus.

Rezultă atunci

$$2\pi - x = 65^0{,}2',$$

deci

$$x = 294^0{,}58'$$

și mai general:

$$\boxed{x = 2k\pi + 294^0{,}58'}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{23''}$$

Relațiile (23') și (23'') ne dau toate rădăcinele ecuației (23).

138. **Problemă.** *Să se rezolve ecuaţia.*

$$sp^4 x + cp^4 x = a \tag{24}$$

şi să se discute. Cazuri particulare: 1°. $a = \frac{1}{8}$; 2°. $a = \frac{17}{32}$.

Soluţie. Ecuaţia (24), intrând în clasa de ecuaţii $f(sp^2 x,\ cp^2 x) = 0$ studiate la No. 136, prin substituţia

$$sp\ x = t,$$

devine:

$$t^4 + (1-t)^4 = a. \tag{25}$$

Conform celor expuse la No. 136, trebuie să găsim rădăcinele $0 \leq t \leq 1$, ale ecuaţiei (25).

Observăm că avem succesiv

$$t^4 + (1-t)^4 = [t^2 + (1-t)^2]^2 - 2t^2(1-t)^2 =$$
$$[1 - 2t(1-t)]^2 - 2t^2(1-t)^2 =$$
$$2t^2(1-t)^2 - 4t(1-t) + 1,$$

astfel că ecuaţia (25) devine:

$$2[t(1-t)]^2 - 4t(1-t) + 1 - a = 0.$$

De aci deducem

$$t(1-t) = \frac{2 \pm \sqrt{2(1+a)}}{2}. \tag{26}$$

Cum trebuie să avem:

$$0 \leq t \leq 1, \tag{27}$$

reţinem din (26) numai ecuaţia

$$t(1-t) = \frac{2 - \sqrt{2(1+a)}}{2},$$

care se mai poate scri:

$$2t^2 - 2t + 2 - \sqrt{2(1+a)} = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie găsim:

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{2\sqrt{2(1+a)} - 3}}{2} = t_i, \quad (i = 1, 2). \tag{28}$$

Pentru a avea $0 \leq t_i \leq 1$, cum cer inegalităţile (27), trebuiesc satisfăcute simultan inegalităţile

$$2\sqrt{2(1+a)} \geqq 3, \quad \text{sau:} \quad a \geqq \frac{1}{8}$$

şi

$$\sqrt{2\sqrt{2(1+a)} - 3} \leqq 3, \quad \text{sau:} \quad a \leqq 1,$$

adică:

$$\frac{1}{8} \leq a \leq 1.$$

Această condiţie fiind împlinită, ecuaţia

$$sp\ x = t_i, \qquad (i = 1, 2)$$

ne dă conform celor stabilite la No. 136

$$\boxed{x = k\pi \pm \operatorname{arc}\ sp\ t_i}, \qquad (i = 1, 2), \tag{24'}$$

arc $sp\ t_i$ fiind ales în primul cadran.

Toate soluţiile ecuaţiei (24) sunt date astfel de relaţia (24').

1°. *Cazul particular* $a = \frac{1}{8}$. (R. M. T., problema 1758).

Ecuaţia de rezolvat în acest caz este:

$$sp^4 x + cp^4 x = \frac{1}{8}. \tag{29}$$

Soluţie. Rădăcinele t_i din (28) devin acum egale, anume

$$t_i = \frac{1}{2}, \quad (i = 1, 2),$$

iar relaţia (24'), ne dă:

$$x = k\pi \pm \operatorname{arc}\ sp\ \frac{1}{2}.$$

Rezultă de aci că toate rădăcinele ecuaţiei (29) sunt

$$\boxed{x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{29'}$$

2°. *Cazul particular* $a = \frac{17}{32}$. *Ecuaţia* (24) *în acest caz devine:*

$$sp^4 x + cp^4 x = \frac{17}{32}. \tag{30}$$

Soluţie. Rădăcinele t_i din (28) sunt acum:

$$t_i = \frac{1 \pm \sqrt{2\sqrt{2\left(1 + \frac{17}{32}\right)} - 3}}{2} =$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm 1{,}41421}{4}, \qquad (i = 1, 2).$$

De aci deducem:

$$t_1 = 0{,}85355, \qquad t_2 = 0{,}14644,$$

cuprinse cum vedem între 0 şi 1.

Rămâne să mai rezolvim încă ecuaţiile:

$$sp\, x = 0{,}85355, \qquad sp\, x = 0{,}14644.$$

Căutând în tabelele 2 şi 1. (No. 17, P. I^a) ce cuprind valorile naturale ale *sinusurilor patratice*, găsim respectiv

85227 . . .	$80^0, 10'$	14554 . . .	$9^0, 40'$
85355 , . .	x ;	14644 . . .	x
85445 . . .	$80^0, 20'$	14772 . . .	$9^0, 50'$.

De aci deducem:

$$x = 80^0, 10' + \left(\frac{128 \times 10}{218}\right)'; \quad x = 9^0, 40' + \left(\frac{90 \times 10}{218}\right)'.$$

Toate rădăcinele ecuaţiei (30) sunt astfel cuprinse în relaţiile:

$$(30') \qquad \boxed{x = k\pi \pm 80^0, 15', 52''}\,,$$

$$(30'') \qquad \boxed{x = k\pi \pm 9^0, 44', 7''}\,, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sisteme de ecuaţii.

139. **Problemă.** *Să se determine arcele x şi y din primul cadran, care să satisfacă sistemul*

$$(31) \qquad \begin{cases} x + y = \alpha \\ sp\, x + sp\, y = \beta \end{cases}$$

şi să se discute. Aplicaţii: 1^0. $\alpha = 75^0$, $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2^0. $\alpha = 105^0$, $\beta = \dfrac{4 - \sqrt{3}}{2}$.

Soluţie. Vom considera următoarele două cazuri ce pot avea loc:

1. *Cazul* $0 < \alpha \leq 90$. Folosim formula de adiţiune (20) (No. 20, P. I^a), anume

$$(32) \qquad sp\,(x+y) = \frac{sp\, x + sp\, y - 2\, sp\, x\, sp\, y}{1 - 2\, sp\, x\, sp\, y},$$

compatibilă în acest caz. Această relaţie, în virtutea ecuaţiilor din sistemul (31), devine

$$\frac{\beta - 2\, sp\, x\, sp\, y}{1 - 2\, sp\, x\, sp\, y} = sp\, \alpha,$$

de unde:

$$sp\, x\, sp\, y = \frac{\beta - sp\, \alpha}{2\,(1 - sp\, \alpha)} = \frac{\beta - sp\, \alpha}{2\, cp\, \alpha}.$$

Această ecuaţie împreună cu a 2^a ecuaţie din sistemul (31), ne permite a forma ecuaţia de gradul al 2-lea

$$t^2 - \beta\, t + \frac{\beta - sp\, \alpha}{2\, cp\, \alpha} = 0,$$

sau

$$(33) \qquad (2\, cp\, \alpha)\, t^2 - (2\, \beta\, cp\, \alpha)\, t + \beta - sp\, \alpha = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt $sp\, x, sp\, y$. In urmă aflăm arcele x şi y.

2. *Cazul* $90^0 < \alpha \leq 180^0$. In acest caz folosim formula de adiţiune (20′) (No. 20, P. I^a), care se impune, anume:

$$(34) \qquad sp\,(x+y) = \frac{cp\, x + cp\, y - 2\, cp\, x\, cp\, y}{1 - 2\, cp\, x\, cp\, y}.$$

Această ecuaţie, în virtutea primei ecuaţii din (31) şi a ecuaţiei a 2^a din (31), pusă sub forma evidentă

$$(35) \qquad cp\, x + cp\, y = 2 - \beta,$$

(căci x şi y sunt arce în primul cadran)

devine

$$\frac{2 - \beta - 2\, cp\, \alpha\, cp\, \beta}{1 - 2\, cp\, \alpha\, cp\, \beta} = sp\, \alpha.$$

De aci deducem

$$cp\, \alpha\, cp\, \beta = \frac{2 - \beta - sp\, \alpha}{2\,(1 - sp\, \alpha)} = \frac{\beta + sp\, \alpha - 2}{2\, cp\, \alpha},$$

(fiindcă: $sp\, \alpha - cp\, \alpha = 1$),

care împreună cu (35) ne permite a forma ecuaţia de gradul al 2-lea

$$(36) \qquad (2\, cp\, \alpha)\, t^2 - (2\, \beta\, cp\, \alpha)\, t + \beta + sp\, \alpha - 2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt $cp\, x, cp\, y$. In urmă aflăm arcele x şi y.

Discuţie. Examinând sistemul (31) şi enunţul, conchidem că condiţiile de posibilitate ale problemei, sunt:

$$0 < \alpha \leq 180^0, \qquad 0 < \beta < 2.$$

Aplicaţii. 1^0. $\alpha = 75^0$, $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ecuaţia (33) care corespunde acestui caz devine:

$$(37) \qquad (2\, cp\, 75^0)\, t^2 - \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, cp\, 75^0\right) t + \frac{\sqrt{3}}{2} - sp\, 75^0 = 0.$$

Insă,

$$cp\,75^0 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \qquad sp\,75^0 = \frac{3+\sqrt{3}}{6},$$

conform relaţiilor (32) şi (33) (No. 23, P. I^a), astfel că ecuaţia (37) adusă la forma întreagă, devine:

$$2(3-\sqrt{3})t^2 - \sqrt{3}(3-\sqrt{3})t + 2\sqrt{3} - 3 = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie obţinem

$$t = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3}) \pm \sqrt{3(52-30\sqrt{3})}}{4(3-\sqrt{3})},$$

sau

$$\begin{cases} sp\,x = \dfrac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3}) - \sqrt{3}(5-3\sqrt{3})}{4(3-\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2} = sp\,45^0 \\ sp\,y = \dfrac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3}) + \sqrt{3}(5-3\sqrt{3})}{4(3-\sqrt{3})} = \\ \qquad \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = sp\,30^0. \end{cases}$$

Rezultă astfel următoarele sisteme de soluţii

$$\begin{cases} x = 45^0 \\ y = 30^0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = 30^0 \\ y = 45^0 \end{cases},$$

x şi y putându-se permuta între ei.

2°. $\alpha = 105^0$, $\beta = \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Ecuaţia (36) corespunzătoare acestui caz, devine:

$$(2\,cp\,105^0)t^2 - \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,cp\,105^0\right)t + \frac{4-\sqrt{3}}{2} + sp\,105^0 - 2 = 0. \tag{38}$$

Cum însă,

$$cp\,105^0 = -\,cp\,75^0 = \frac{\sqrt{3}-3}{6},$$

$$sp\,105^0 = sp\,75^0 = \frac{3+\sqrt{3}}{6},$$

ecuaţia (38) adusă la forma întreagă, devine:

$$2(\sqrt{3}-3)t^2 - \sqrt{3}(\sqrt{3}-3)t + 3 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie de gradul al 2^{lea}, obţinem:

$$t = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-3) \pm \sqrt{3(52-30\sqrt{3})}}{4(\sqrt{3}-3)}.$$

De aci deducem:

$$cp\,x = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-3) - \sqrt{3}(5-3\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}-3)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = cp\,60^0,$$

$$cp\,y = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-3) + \sqrt{3}(5-3\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}-3)} = \frac{1}{2} = cp\,45^0.$$

Rezultă astfel următoarele sisteme de soluţii

$$\begin{cases} x = 60^0 \\ y = 45^0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = 45^0 \\ y = 60^0, \end{cases}$$

x şi y putându-se permuta între ei.

Observare. *Analog putem rezolva sistemele:*

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ sp\,x \pm cp\,y = \beta \end{cases}; \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ sp\,x\,sp\,y = \beta \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ cp\,x\,cp\,y = \beta. \end{cases}$$

Eliminări de arce.

140. **Problemă.** *Să se elimine arcul a între relaţiile:*

$$\frac{\sin a}{\sin a + \cos a} = A, \qquad \frac{\sin 3a}{\sin 3a + \cos 3a} = B.$$

Soluţie. Presupunem întâi $0 \leq a \leq 30^0$ şi atunci relaţiile din enunţ se pot scri

$$sp\,a = A, \qquad sp\,3a = B, \tag{39}$$

în virtutea primei formule din tabloul (11) (No. 13, P. I^a).

De altă parte observăm că relaţia (26′) (No. 22, P. I^a), anume

$$sp\,3a = \frac{3\,sp\,a - 6\,sp^2 a + 2\,sp^3 a}{1 - 6\,sp^2 a + 4\,sp^3 a}$$

în baza relaţiilor (39) devine:

$$\boxed{B = \frac{A(3 - 6A + 2A^2)}{1 - 6A^2 + 4A^3}}.$$

Aceasta este relaţia cerută şi ea fiind valabilă pentru $0 \leq a \leq 30^0$, este valabilă oricare ar fi

arcul a, fiindcă dacă eliminarea arcului a s'ar fi făcut prin metodele *Trigonometriei circulare*, s'ar fi obţinut o singură relaţie.

141. **Problemă.** *Să se elimine arcele a şi b din relaţiile:*

$$\frac{\sin a}{\sin a + \cos a} = A\,, \qquad \frac{\sin b}{\sin b + \cos b} = B\,,$$

$$\frac{\sin (a+b)}{\sin (a+b) + \cos (a+b)} = C\,.$$

Soluţie. Presupunem arcele a, b, $a+b$, în primul cadran şi atunci relaţiile date se mai pot scri respectiv:

(40) $\quad sp\, a = A\,, \quad sp\, b = B\,, \quad sp\,(a+b) = C\,.$

Observăm acum că formula de adiţiune (20) (No. 20, P. I^a), anume

$$sp\,(a+b) = \frac{sp\, a + sp\, b - 2\, sp\, a\, sp\, b}{1 - 2\, sp\, a\, sp\, b}\,,$$

în virtutea relaţiilor (40) devine:

$$\boxed{C = \frac{A + B - 2AB}{1 - 2AB}}\,.$$

Aceasta este relaţia cerută, care fiind valabilă pentru a, b, $a+b$ în primul cadran, este valabilă oricare ar fi arcele a şi b, pentru acelaşi motiv ca în problema precedentă.

IDENTITĂŢI ŞI SISTEME DE ECUAŢII CE CUPRIND UNGHIURILE UNUI TRIUNGHIU.

142. **Problemă.** A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, să se stabilească relaţia:*

$$\sum \frac{\sin A}{1+\sin A+\cos A} - 2 \prod \frac{\sin A}{1+\sin A+\cos A} = 1\,.$$

(R. M. T., problema 1392).

Soluţie. Observăm că,

$$\frac{\sin A}{1 + \sin A + \cos A} =$$

$$\frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = sp\, \frac{A}{2}\,,$$

conform primei relaţii din tabloul (11) (No. 13, P. I^a), sau conform relaţiei (2) (No. 77, P. III^a) care ne dă fără nici o transformare primul membru egal cu ultimul.

Relaţia din enunţ se poate scri acum sub forma:

$$\sum sp\, \frac{A}{2} - 2\, sp\, \frac{A}{2}\, sp\, \frac{B}{2}\, sp\, \frac{C}{2} = 1\,.$$

Dar această relaţie este valabilă în orice triunghiu cum am demonstrat, [relaţia (84) (No. 72, P. II^a)], deci şi relaţia din enunţ este justificată şi se stabileşte folosind calea inversă.

143. **Problemă.** *Ştiind că* A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu oarecare, se cere să se determine condiţiile de compatibilitate ale sistemului*

$$\begin{cases} \dfrac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = l \\[2ex] \dfrac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} = m \\[2ex] \dfrac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = n \end{cases}$$

l, m, n fiind daţi. In urmă să se rezolve sistemul.

Cazul particular:

$$l = 2\, m = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3}\,, \quad n = \sqrt{3} - 1\,.$$

(R. M. T., problema 1576).

Soluţie. Primii membrii a-i ecuaţiilor date, conform formulelor (39) (No. 60, P. II^a), sunt respectivi egali cu $2\, sp\, \alpha$, $2\, sp\, \beta$, $2\, sp\, \gamma$ unde α, β, γ sunt unghiurile asociate triunghiului A B C.

Sistemul dat se poate scri deci:

$$(41) \qquad \begin{cases} 2\, sp\, \alpha = l \\ 2\, sp\, \beta = m \\ 2\, sp\, \gamma = n\,. \end{cases}$$

Cum.

$$sp\, \alpha + sp\, \beta + sp\, \gamma = 1$$

conform relaţiei (36) (No. 59, P. II^a), urmează condiţia de compatibilitate:

(42) $$\boxed{l+m+n=2}.$$

Condiţia (42) fiind satisfăcută, sistemul (41) ne dă unghiurile asociate α, β, γ.

Rămâne să aflăm unghiurile A, B, C care să satisfacă sistemul dat.

In acest scop folosim relaţiile stabilite (45) (No 60, P. II^a), anume:

(43) $$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\beta)\operatorname{tg}(45^0-\gamma)}{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)},\quad \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^0-\beta)},\quad \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)\operatorname{tg}(45^0-\beta)}{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)},$$

care ne dau unghiurile A, B, C.

Cazul particular $l=2\,m=\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}$, $n=\sqrt{3}-1$.

In acest caz sistemul (41) devine:

$$\begin{cases} sp\,\alpha=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \\ sp\,\beta=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \\ sp\,\gamma=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Ţinând seamă de aceste valori ale lui $sp\,\alpha$, $sp\,\beta$, $sp\,\gamma$ şi de relaţia (41) (No. 60, P. II^a), avem:

$$\operatorname{tg}(45^0-\alpha)=1-2\,sp\,\alpha=1-\frac{6-2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

$$\operatorname{tg}(45^0-\beta)=1-2\,sp\,\beta=1-\frac{3-\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}(45^0-\gamma)=1-2\,sp\,\gamma=1-\sqrt{3}+1=2-\sqrt{3}.$$

Inlocuind aceste valori în relaţiile (43), obţinem:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=1,\quad \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2,\quad \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{1}{3}.$$

De aci deducem cu uşurinţă că unghiurile căutate, în cazul particular dat, sunt:

$$\boxed{A=90^0},\quad \boxed{B=30^0},\quad \boxed{C=60^0}.$$

Probleme din
„Complément de Trigonométrie" par F. G. M.

144. **Problemă.** *Fiind dat un triunghiu şi cercul său înscris, se duc acestui cerc tangente paralele cu laturile ceia ce dă trei noui triuughiuri interioare primului. Să se demonstreze că suma razelor cercurilor înscrise triunghiurilor interioare, este egală cu raza cercului înscris triunghiului dat.* (F. G. M., No. 471, pp. 323—324).

Soluţie. Fie triunghiul oarecare A B C în care înscrim cercul O de rază r şi ducem D E, F G, H L tangente cercului O şi paralele respectiv laturilor, (fig. 38). Inscrim apoi în triunghiurile interioare

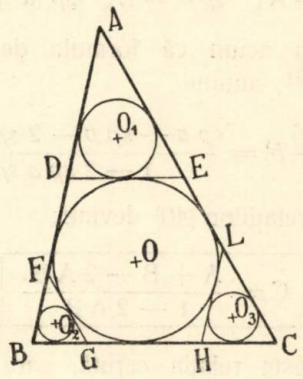


Fig. 38.

A D E, B F G, C H L cercurile O_1, O_2, O_3 de raze respectiv r_1, r_2, r_3.

Vom observa întâi că *unghiurile asociate* ale triunghiurilor D A E, B F G, C H L sunt respectiv egale cu *unghiurile asociate* α, β, γ ale triunghiului A B C în virtutea *teoremei 2* (No. 59, P. II^a), toate aceste triunghiuri fiind asemenea cu A B C.

Observăm acum că cercul O_1 de rază r_1 este înscris în triunghiul A D E, iar cercul O de rază r este exînscris acestui triunghiu, astfel că în baza *teoremei 2* (No. 63, P. II^a), avem:

$$sp\,\alpha=\frac{r-r_1}{2r},$$

analog: $$sp\,\beta=\frac{r-r_2}{2r},\qquad sp\,\gamma=\frac{r-r_3}{2r}.$$

Cum suma *sinusurilor patratice* ale *unghiurilor asociate* unui triunghiu este egală cu 1, conform relaţiei (36) (No. 59, P. II^a), putem scri:

$$\frac{r-r_1}{2r}+\frac{r-r_2}{2r}+\frac{r-r_3}{2r}=1.$$

De aci rezultă

$$\boxed{r=r_1+r_2+r_3},$$

ceia ce trebuia stabilit.

145. **Problemă.** *Să se găsească locul vârfului* A *al unui triunghiu a cărui bază* B C *este fixă şi în care:*

1°. *produsul* $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ *este constant,*

2°. *câtul lui* $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ *prin* $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ *este constant.*

(F. G. M., No. 513, p. 346).

Soluţie. 1°. In relaţia (43) (No. 60, P. II^a), anume

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}(45^0-\alpha)$$

primul membru fiind constant, rezultă

(44) $$\operatorname{tg}(45^0-\alpha)=m, \qquad (m \text{ constant}),$$

adică unghiul asociat α este constant.

De altă parte, din definiţia *unghiurilor asociate,* pentru a avea *unghiul asociat* α, se construeşte triunghiul dreptunghic D E F (fig. 14) de catete $DE=a$, $DF=b+c$ şi unghiul opus lui a este α.

Dar în acest triunghiu dreptunghic D E F, avem

(45) $$b+c=a\operatorname{cotg}\alpha$$

şi cum a şi α sunt constanţi rezultă că $b+c$ este constant, deci *locul vârfului* A *este o elipsă.*

Observare. Axa mare a acestei elipse se află calculând pe cotg α în funcţie de m. Pentru aceasta observăm că relaţia (44) se mai poate scri,

$$\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{cotg}\alpha-1}{\operatorname{cotp}\alpha+1}=m,$$

de unde:

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1+m}{1-m}.$$

Rezultă că axa mare este:

$$b+c=a\,\frac{1+m}{1-m}.$$

2°. Impărţind ultimele două relaţii din (43) No. 60, P. II^a), avem:

(46) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)}{\operatorname{tg}(45^0-\beta)}=\frac{1-2\,sp\,\gamma}{1-2\,sp\,\beta}=m.$$

De altă parte din *teorema 1^a* (No. 59, P. II^a) deducem

$$c=2p\,sp\,\gamma, \qquad b=2p\,sp\,\beta,$$

sau:

$$1-\frac{c}{p}=1-2\,sp\,\gamma, \qquad 1-\frac{b}{p}=1-2\,sp\,\gamma.$$

Impărţind aceste relaţii şi ţinând seamă de relaţia (46), obţinem:

$$\frac{a+b-c}{a+c-b}=\frac{1-2\,sp\,\gamma}{1-2\,sp\,\beta}=m.$$

De aci deducem

$$b-c=a\frac{m-1}{m+1}$$

şi cum a şi m sunt constanţi, rezultă că $b-c$ este constant, deci *locul geometric al vârfului* A *este o iperbolă.*

Expresiuni nedeterminate.

146. **Problemă.** *Să se afle adevărata valoare a expresiunii*

$$E=\frac{sp\,x-0{,}5}{sp\,(x-45^0)}$$

pentru $x=45^0$.

Soluţie. Expresiunea E, pentru $x=45^0$ ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, astfel că putem aplica regula lui *l'Hôspital* şi avem pentru adevarata valoare a lui E:

$$E=\lim_{x=45^0}\frac{sp^2\,x+cp^2\,x}{sp^2\,(x-45^0)+cp^2\,(x-45^0)}=$$

$$\frac{0{,}25+0{,}25}{1}=\frac{1}{2}.$$

147. **Problemă.** *Să se afle adevărata valoare a expresiunii*

$$E=(sp\,x)^{sp\,x},$$

pentru $x=0$.

Soluţie. Pentru $x = 0$, expresiunea E ia forma nedeterminată 0^0.

Luând logaritmul, avem:

$$\lg E = \frac{\lg sp\, x}{\frac{1}{sp\, x}}.$$

Pentru $x = 0$, expresiunea $\lg E$ ia forma nedeterminată $-\frac{\infty}{\infty}$, astfel că putem aplica regula lui *l'Hôspital* şi avem pentru adevărata valoare a lui $\lg E$,

$$\lg E = \lim_{x=0} . \frac{\frac{sp^2 x + cp^2 x}{sp\, x}}{-\frac{sp^2 x + cp^2 x}{sp^2 x}} = \lim_{x=0} . (-sp\, x) = 0,$$

de unde urmează că adevărata valoare a lui E este

$$E = 1.$$

Maxim şi minim.

148. **Problemă.** *Să se afle maximul sau minimul funcţiunii*

$$y = sp^m x + cp^m x, \quad (m \text{ întreg pozitiv}).$$

Soluţie. Derivata funcţiunii date se schimbă pentru diferitele cadrane şi în virtutea celor stabilite la No. 25 şi No. 26 (P. I^a), avem:

(47)

cadranele	y'
I	$m(sp^2 x + cp^2 x)(sp^{m-1} x - cp^{m-1} x)$
II	$-m(sp^2 x + cp^2 x)(sp^{m-1} x + cp^{m-1} x)$
III	$-m(sp^2 x + cp^2 x)(sp^{m-1} x - cp^{m-1} x)$
IV	$m(sp^2 x + cp^2 x)(sp^{m-1} x + cp^{m-1} x)$

Să vedem acum care sunt arcele din diferitele cadrane care anulează derivata corespunzătoare y', astfel observăm că:

1^0. Pentru $x = 45^0$, avem $y' = 0$ şi y' trece prin zero de la negativ la pozitiv, de unde urmează că avem în acest caz pentru y un minim, anume:

$$\boxed{y_m = \frac{1}{2^{m-1}}, \quad \text{pentru } x = 45^0}.$$

2^0. Dacă m este impar şi x este în cadranul al 2^{lea}, observăm că y' nu se anulează, deci n'avem maxim sau minim pentru y.

Dacă însă m este par, observăm că pentru $x = 135^0$, avem $y' = 0$ şi y' trece prin zero de la negativ la pozitiv, deci y este minim, astfel:

$$\boxed{y_m = \frac{1}{2^{m-1}}, \quad \text{pentru } x = 135^0}.$$

3^0. Dacă $x = 225^0$, derivata y' corespunzătoare este nulă şi trece de la pozitiv la negativ dacă m este impar şi de la negativ la pozitiv dacă m este par, avem deci pentru y maxim în primul caz şi minim în al 2^{lea}, putem deci scri:

$$\boxed{\begin{aligned} y_M &= -\frac{1}{2^{m-1}}, \quad \text{pentru } x = 225^0 \text{ şi } m \text{ impar} \\ y_m &= \frac{1}{2^{m-1}}, \quad \text{pentru } x = 225^0 \text{ şi } m \text{ par} \end{aligned}}.$$

4^0. Dacă m este impar şi x este în cadranul al 4^{lea}, observăm că y' nu se anulează, deci n'avem maxim sau minim pentru y.

Dacă însă m este par, observăm că pentru $x = 315^0$, avem $y' = 0$ şi y' trece prin zero de la negativ la pozitiv, deci y este minim şi avem:

$$\boxed{y_m = \frac{1}{2^{m-1}} \quad \text{pentru } x = 315^0}.$$

Observări importante. 1^0. Din tabloul (47) se observă că pentru $m = 1$, avem $y' \equiv 0$ oricare ar fi arcul x în cadranele I şi III, rezultă că y este constant în aceste cazuri şi în adevăr avem:

$$y = sp\, x + cp\, x = 1, \quad \text{pentru} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = sp\, x + cp\, x = -1, \quad \text{pentru} \quad \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2},$$

conform relaţiei (4) şi a relaţiei a 2^a din (4') (P. I^a).

2^0. Din tabloul (47) se observă că derivata funcţiunii y este o funcţiune simplă-discontinuă pentru arcele

$$(48) \qquad x = \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi, \ldots,$$

astfel avem detailat:

x	m par		m impar	
	y'	y	y'	y
$\frac{\pi}{2}$	$\pm m$	1 (M)	$\pm m$	1 (M)
π	$\pm m$	1 (M)	$\mp m$	-1 (m)
$\frac{3\pi}{2}$	$\pm m$	1 (M)	$\mp m$	-1 (m)
2π	$\pm m$	1 (M)	$\pm m$	1 (M)

Vedem din acest tablou, faptul important, că sunt valori ale lui x [acelea din şirul (48), pentru care funcţiunea y are maxim (M) sau minim (m), fără ca derivata să se anuleze; *cauza este că pentru aceste valori ale lui x derivata este simplu-discontinuă şi îşi schimbă semnul.*

3°. In baza periodicităţii funcţiunii y, arcelor menţionate le putem adăoga $2k\pi$, ($k = 1, 2, \ldots$), fără a schimba concluziile de mai sus.

149. **Problemă.** *Dintre toate triunghiurile dreptunghice care au aceiaşi ipotenuză a, care este acela în care raportul ipotenuzei către perimetru este minim?* (F. G. M., p. 387).

Soluţie. Cunoaştem într'un triunghiu dreptunghic relaţiile (48) (No. 61, P. II^a),

$$\frac{a+c}{cp\frac{B}{2}} = \frac{a+b}{cp\frac{C}{2}} = 2p.$$

De aci deducem:

$$\frac{a+2p}{cp\frac{B}{2}+cp\frac{C}{2}} = 2p,$$

sau

$$1+\frac{a}{2p} = cp\frac{B}{2}+cp\frac{C}{2}.$$

Evident că minimul lui $\frac{a}{2p}$ are loc când suma

$$cp\frac{B}{2}+cp\frac{C}{2}$$

este minimă. Dar produsul acestor termeni este constant $\left[cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2} = 1\right.$, conform relaţiei (85 No. 72, P. II^a)$\left.\right]$, deci suma este minimă când termenii sunt egali, ceia ce are loc când

$$\boxed{B = C = 45^0}.$$

Triunghiul dreptunghic cerut trebuie să fie isoscel.

150. **Problemă.** *Dintre toate triunghiurile care au laturile în progresie aritmetică să se afle maximul unghiului opus laturii mijlocii.* (*Gazeta Matematică*, vol. XXII, problema 2183, p. 213).

Soluţie. Fie $a = b - r$, b, $c = b + r$ laturile în progresie aritmetică ale unui triunghiu A B C şi α, β, γ unghiurile sale asociate.

Conform *teoremei I^a* (No. 59, P. II^a), avem:

$$(49)\qquad \frac{b-r}{sp\,\alpha} = \frac{b}{sp\,\beta} = \frac{b+r}{sp\,\gamma} = 3b,$$

fiindcă $sp\,\alpha + sp\,\beta + sp\,\gamma = 1$, [relaţia (36) P. II^a].

Din (49) deducem

$$(50)\qquad sp\,\beta = \frac{1}{3}, \qquad sp\,\alpha + sp\,\gamma = \frac{2}{3}.$$

Ultima relaţie se mai poate scri

$$(1 - 2\,sp\,\alpha) + (1 - 2\,sp\,\gamma) = \frac{2}{3},$$

sau:

$$(51)\qquad \operatorname{tg}(45^0 - \alpha) + \operatorname{tg}(45^0 - \gamma) = \frac{2}{3},$$

în baza relaţiei (41) (No. 60, P. II^a).

De altă parte

$$(52)\qquad \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tg}(45^0-\gamma)\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^0-\beta)},$$

formula 2^a din (45) (No. 60, P. II^a).

Cum β este constant din (50), rezultă din (52) că B este maxim când produsul

$$\operatorname{tg}(45^0 - \gamma)\operatorname{tg}(45^0 - \alpha)$$

este maxim. Suma acestor factori pozitivi fiind constantă în virtutea relaţiei (51), rezultă că produsul lor este maxim când factorii sunt egali, ceeace are loc pentru

$$\alpha = \gamma .$$

Acum deducem uşor din (50),

(53) $$\alpha = \beta = \gamma .$$

De altă parte, conform *teoremei 1ª* (No. 59, P. IIª), avem

$$a = 2\,p\,sp\,\alpha, \quad b = 2\,p\,sp\,\beta, \quad c = 2\,p\,sp\,\gamma$$

şi în baza relaţiilor (53) conchidem:

$$a = b = c .$$

Triunghiul cerut este echilateral, iar *maximul lui* B *este* 60^0.

Câteva formule remarcabile.

151. Fie α un arc pozitiv şi $n\,\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, ($n$ întreg pozitiv). Considerăm primele relaţii din tabloul (11) (No. 13, P. Iª), care se pot scri:

$$sp\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}, \qquad cp\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} .$$

De aci deducem

$$cp\,\alpha + i\,sp\,\alpha = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}\sin(45^0 + \alpha)}, \qquad (i = \sqrt{-1}) .$$

Analog,

$$cp\,n\,\alpha + i\,sp\,n\,\alpha = \frac{e^{n\,i\alpha}}{\sqrt{2}\sin(45^0 + n\,\alpha)} .$$

Din aceste relaţii avem respectiv

$$e^{i\alpha} = \sqrt{2}\,(cp\,\alpha + i\,sp\,\alpha)\sin(45^0 + \alpha),$$

$$e^{n\,i\alpha} = \sqrt{2}\,(cp\,n\,\alpha + i\,sp\,n\,\alpha)\sin(45^0 + n\,\alpha) .$$

Ridicăm prima relaţie la puterea n şi ţinând seamă de relaţia 2ª, obţinem:

$$(cp\,n\,\alpha + i\,sp\,n\,\alpha)\sin(45^0 + n\,\alpha) = 2^{\frac{n-1}{2}}(cp\,\alpha + i\,sp\,\alpha)^n \sin(45^0 + \alpha) .$$

Dezvoltând binonomul din membrul al 2lea şi egalând părţile reale şi coeficienţii părţilor imaginare, găsim:

(54)
$$\boxed{cp\,n\,\alpha = 2^{\frac{n-1}{2}}(cp^n\alpha - C_n^2\,sp^2\alpha\,cp^{n-2}\alpha + C_n^4\,sp^4\alpha\,cp^{n-4}\alpha - \cdots)\frac{\sin^n(45^0+\alpha)}{\sin(45^0+n\,\alpha)}},$$

$$\boxed{sp\,n\,\alpha = 2^{\frac{n-1}{2}}(C_n^1\,sp\,\alpha\,cp^{n-1}\alpha - C_n^3\,sp^3\alpha\,cp^{n-3}\alpha + C_n^5\,sp^5\alpha\,cp^{n-5}\alpha - \cdots)\frac{\sin^n(45^0+\alpha)}{\sin(45^0+n\,\alpha)}} .$$

152. *Dacă adunăm relaţiile (54), avem succesiv:*

$$1 = 2^{\frac{n-1}{2}}(cp^n\alpha + C_n^1\,sp\,\alpha\,cp^{n-1}\alpha - C_n^2\,sp^2\alpha\,cp^{n-2}\alpha - C_n^3\,sp^3\alpha\,cp^{n-3}\alpha + \cdots)\frac{\sin^n(45^0+\alpha)}{\sin(45^0+n\,\alpha)},$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}}((cp\,\alpha + sp\,\alpha)^n - 2\,C_n^2\,sp^2\alpha\,cp^{n-2}\alpha - 2\,C_n^3\,sp^3\,cp^{n-3}\alpha - \cdots)\frac{\sin^n(45^0+\alpha)}{\sin(45^0+n\,\alpha)} .$$

De aci deducem relaţia remarcabilă

(55)
$$\boxed{\sin(45^0+n\,\alpha) = 2^{\frac{n-1}{2}}(1 - 2C_n^2 sp^2\alpha\,cp^{n-2}\alpha - 2C_n^3 sp^3\alpha\,cp^{n-3}\alpha - 2C_n^6 sp^6\alpha\,cp^{n-6}\alpha - 2C_n^7 sp^7\alpha\,cp^{n-7}\alpha - \cdots)\sin^n(45^0+\alpha)} .$$

Dacă împărţim relaţiile (54) a 2ª prin prima, obţinem:

(56)
$$\boxed{\operatorname{tg} n\,\alpha = \frac{C_n^1\,sp\,\alpha\,cp^{n-1}\alpha - C_n^3\,sp^3\alpha\,cp^{n-3}\alpha + C_5^n\,sp^5\alpha\,cp^{n-5}\alpha - \cdots}{cp^n\alpha - C_n^2\,sp^2\alpha\,cp^{n-2}\alpha + C_n^4\,sp^4\alpha\,cp^{n-4}\alpha - \cdots}} .$$

Cazuri particulare. 1°. *Pentru* $n\alpha = \frac{\pi}{4}$, *identităţile* (54) *şi* (55) *devin:*

$$\boxed{cp^n \frac{\pi}{4n} - C_n^2 sp^2 \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-2} \frac{\pi}{4n} + C_n^4 sp^4 \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-4} \frac{\pi}{4n} - \cdots = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \sin^n \frac{(n+1)\pi}{4n}}},$$

$$(57)\quad \boxed{C_n^1 sp \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-1} \frac{\pi}{4n} - C_n^3 sp^3 \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-3} \frac{\pi}{4n} + C_n^5 sp^5 \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-5} \frac{\pi}{4n} - \cdots = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \sin^n \frac{(n+1)\pi}{4n}}},$$

$$\boxed{\begin{aligned} &1 - 2C_n^2 sp^2 \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-2} \frac{\pi}{4n} - 2C_n^3 sp^3 \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-3} \frac{\pi}{4n} - 2C_n^6 sp^6 \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-6} \frac{\pi}{4n} \\ &- 2C_n^7 sp^7 \frac{\pi}{4n}\, cp^{n-7} \frac{\pi}{4n} - \cdots = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \sin^n \frac{(n+1)\pi}{4n}} \end{aligned}}.$$

2°. *Pentru* $n\alpha = \frac{\pi}{2}$, obţinem identităţi analoage.

3°. Pentru $n = 5$, şi ţinând seamă că

$$\sin 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

identităţile (57) devin:

$$\boxed{cp^5 9^0 - 10\, sp^2 9^0\, cp^3 9^0 + 5\, sp^4 9^0\, cp\, 9^0 = \frac{128}{(1+\sqrt{5})^2}},$$

$$(58)\quad \boxed{5\, sp\, 9^0\, cp^4 9^0 - 10\, sp^3 9^0\, cp^2 9^0 + sp^5 9^0 = \frac{128}{(1-\sqrt{5})^2}},$$

$$\boxed{1 - 20\, sp^2 9^0\, cp^2 9^0 = \frac{2^8}{(1+\sqrt{5})^5}}.$$

Două formule de însumare.

153. *Dacă* x *şi* mx (m *întreg pozitiv*) *sunt arce în primul cadran, atunci avem următoarele formule de însumare:*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} \frac{1 - 2\, sp\, kx}{1 - 2\, sp\, kx\, cp\, kx} = \frac{\sin mx \cos(m+1)x}{\sin x}},$$

$$(59)\quad \boxed{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - 2\, sp\, kx\, cp\, kx} = m + \frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x}}.$$

Soluţie. Arcul kx fiind în primul cadran, primele două formule din tabloul (11) (No. 13, P. I[a]) ne permit a scri succesiv:

$$1 - 2\, sp\, kx = 1 - \frac{2 \sin kx}{\sin kx + \cos kx} = \frac{\cos kx - \sin kx}{\cos kx + \sin kx} =$$

$$\frac{\cos^2 kx - \sin^2 kx}{(\cos kx + \sin kx)^2} = \frac{\cos 2kx}{1 + \sin 2kx},$$

$$(60)$$

$$1 - 2\, sp\, kx\, cp\, kx = 1 - \frac{\sin kx \cos kx}{(\sin kx + \cos kx)^2} =$$

$$\frac{1}{1 + \sin 2kx}.$$

Ţinând seamă de formulele care dau suma sinusurilor şi cosinusurilor unor arce în progresie aritmetică (F. G. M., No. 59, p. p. 44—45), deducem din relaţiile (60)

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1 - 2\, sp\, kx}{1 - 2\, sp\, kx\, cp\, kx} = \sum_{k=1}^{m} \cos 2kx = \frac{\sin mx \cos(m+1)x}{\sin x},$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - 2\, sp\, kx\, cp\, kx} = \sum_{k=1}^{m} (1 + \sin 2kx) = m + \frac{\sin mx \sin(m+1)x}{\sin x},$$

care sunt tocmai formulele cerute.

DEZVOLTAREA IN SERIE A FUNCȚIUNILOR TRIGONOMETRICE PATRATICE.

Dezvoltarea lui *2 sp (45° x) și 2 cp (45° − x).*

154. Dacă $-45^\circ \leq x \leq 45^\circ$, atunci conform formulelor (12) și (13) (No. 15, P. I[a]) în care luăm $a = 45^\circ - x$, putem scri:

$$sp\,(45^\circ - x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{2}, \quad cp\,(45^\circ - x) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2}.$$

Dacă folosim pentru $\operatorname{tg} x$ dezvoltarea sa în serie, cunoscută, atunci obținem

(61)
$$\boxed{2\,sp\,(45^\circ - x) = 1 - x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{3.5} - \frac{17x^7}{3^2.5.7} - \frac{62x^9}{3^2.5.7.9} - \cdots},$$

$$\boxed{2\,cp\,(45^\circ - x) = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3^2.5.7} + \frac{62x^9}{3^2.5.7.9} + \cdots},$$

dezvoltări valabile pentru $|x| \leq \frac{\pi}{4}$, precum și pentru arcele congruente cu 2π.

Desvoltarea lui $arc\,sp\frac{x+1}{2}$ **și** $arc\,Sp\,(x+1)$.

155. Dacă în formulele (60) și (61) (No. 46, P. I[a]) pe care le-am stabilit pentru arcele din primul cadran substituim x respectiv, prin $\frac{x+1}{2}$ și prin $x+1$ și apoi folosind dezvoltarea cunoscută a lui arc tg x, obținem

(62)
$$\boxed{\operatorname{arc}\,sp\frac{x+1}{2} = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots},$$

$$\boxed{\operatorname{arc}\,Sp\,(x+1) = \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots},$$

dezvoltări valabile pentru $|x| \leq 1$.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

8. — *Notes d'analyse indéterminée.*

I. *Sur l'équation* $a\,X^2 + b\,Y^2 = Z^3$, *a et b étant donnés. M. Rignaux (Cusset, Allier)* m'a communiqué la double identité

$$\boxed{\begin{array}{c} a(ax^3 + bxy^2)^2 + b(ax^2y + by^3)^2 = \\ a(ax^3 - 3bxy^2)^2 + b(-3ax^2y + by^3)^2 = (ax^2 + by^2)^3 \end{array}}.$$

Exemple numérique.

$$a = 1, \quad b = 3, \quad x = 1, \quad y = 2$$
$$13^2 + 3 \cdot 26^2 = 35^2 + 3 \cdot 18^2 = 13^3.$$

On peut donc obtenir une infinité de solutions entières de l'équation $a\,X^2 + b\,Y^2 = Z^2$ (a et b donnés). De plus, on peut affirmer qu'il existe une infinité de cubes représentables de 2 façons au moin spar la forme quadratique binaire $a\,X^2 + b\,Y^2$.

II. De l'identité connue

$$(m^2 + Dn^2)(p^2 + Dq^2) = (mp \pm Dnq)^2 + D(mq \mp np)^2,$$

on déduit la suivante, en remplaçant D par $\frac{b}{a}$ et en chassant les dénominateurs:

$$(am^2 + bn^2)(ap^2 + bq^2) = (amp \pm bnq)^2 + ab(mq \mp np)^2.$$

En appliquant cette dernière identité à

$$a\,X^2 + b\,Y^2 = a\,X'^2 + b\,Y'^2 = Z^3,$$ X, Y, X', Y' et Z ayant les expressions sub I, et en faisant

$$\begin{cases} m = X \text{ resp. } X' \\ n = Y \text{ resp. } Y' \\ p = x \\ q = y, \text{ on trouve:} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c}(a^3x^4 - b^2y^4)^3 + ab(2ax^3y + 2bxy^3)^2 = \\ a^2x^4 - 6abx^2y^2 + b^2y^4)^2 + ab(4ax^3y - 4bxy^3)^2 = \\ (ax^2 + by^2)^4\end{array}\right| .$$

On trouve, avec les mêmes valeurs pour a, b, x, y:

$$143^2 + 3 \cdot 52^2 = 73^2 + 3 \cdot 88^2 = 134^2 .$$

N. Ces résultats peuvent être étendus à l'équation $aX^2 + bY^2 = Z^n$, n étant impair ou pair.

A. GLODEN

---

9. — *Magisches Quadrat 1.*

(1). Das nebenstehende 3^2 feldrige Quadrat ergibt in *jeder* waagrechten Reihe un in *jeder* senkrechten Reihe die Summe 1.

$\frac{78}{91}$	$-\frac{26}{91}$	$\frac{39}{91}$
$\frac{34}{91}$	$\frac{33}{91}$	$\frac{24}{91}$
$-\frac{21}{91}$	$\frac{84}{91}$	$\frac{28}{91}$

(2). Setzt man in der 1. waagrechten Reihe jede Zahl ins Quadrat, so bleibt diese Merkwürdigkeit bestehen. Dies gilt auch für die 3. waagrechte Reihe. Es gilt also

$$\frac{78}{91} + \left(-\frac{26}{91}\right) + \frac{39}{91} = \left(-\frac{21}{91}\right) + \frac{84}{91} + \frac{28}{91} = \left(\frac{78}{91}\right)^2 +$$

$$\left(-\frac{26}{91}\right)^2 + \left(\frac{39}{91}\right)^2 = \left(-\frac{21}{91}\right)^2 + \left(\frac{84}{91}\right)^2 + \left(\frac{28}{91}\right)^2 = 1 .$$

(3). Für die letzten Ziffern der Zähler in der 1. waagrechten Reihe gilt

$$(-8)^3 + (-6)^3 + 9^3 = 1.$$

(4). Für die 1. waagrechte Reihe gilt noch die Relation

$$\left(\frac{78}{91} + y\right)^2 + \left(-\frac{26}{91} + y\right)^2 + \left(\frac{39}{91} + y\right)^2 =$$

$(1 + y)^2 + (0 + y)^2 + (0 + y)^2$ für *beliebiges* y.

(5). Für die 3. waagrechte Reihe gilt noch die Relation

$$\left(-\frac{21}{91}\right)^2 + \left(\frac{84}{91}\right)^2 + \left(\frac{28}{91}\right)^2 =$$

$(1 + y)^2 + (0 + y)^2 + (0 + y)^2$ für *beliebiges* y.

Bemerkung: Magische Figuren der vorstehenden Art lassen sich konstruieren mit Benutzung der Formeln von *Alaci* und *Germanescu*

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1, \end{cases}$$

wo, $a = \frac{\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1}$; $b = \frac{-\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1}$; $c = \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$

für beliebiges λ, und nach der Formel

$$(9u^4)^3 + (3u - 9u^4)^3 + (1 - 9u^3)^3 = 1$$

oder

$$(9r^4)^3 + (3rv^3 - 9r^4)^3 + (v^4 - 9r^3v)^3 = (v^4)^3,$$

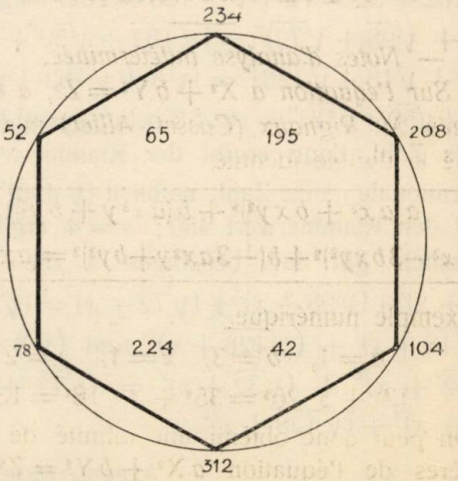
wo u, r und v beliebig sind. Das Problem lässt sich generalisieren.

A. MOESSNER

---

10. — *Zwei Spezialfälle von magischen Figuren.*

In „Rev. Mat. d. Timişoara". Anul XIX, No. 4 gibt Herr *Dr. E. Stern* interessante Solutionen zu meinem Problem in No. 11 der „Rev. Mat. d. Tim." XVIII (1939). Als Gegenleistung möchte ich die Herren General *E. Cazalas* und *Dr. Stern* folgende zwei Spezialfälle von magischen Figuren geben. Die beiden Figuren lassen sich sehr weit generalisieren und die Konditionen schärfer fassen, als es hier geschehen ist.



(1) Sechseck mit magischen Relationen.

Bei nebenstehendem Sechseck sind Paare von

Zahlentripeln vorhanden, welche Summengleichheit aufweisen und solche Paare von Zahlentripeln, welche eine Gleichheit der Produkte zeigen.

Est ist

$$\text{I.} \begin{cases} 52+234+208=78+312+104=494 \\ 52\,.\,234\,.\,208=78\,.\,312\,.\,104=2530944. \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} 52+104+195=78+208+\ 65=351 \\ 52\,.\,104\,.\,195=78\,.\,208\,.\ \ 65=1054560. \end{cases}$$

$$\text{III.} \begin{cases} 52+\ 78+224=208+104+\ 42=354 \\ 52\,.\ 78\,.\,224=208\,.\,104\,.\ \ 42=908544. \end{cases}$$

(2) Magisches Quadrat mit irrationalen Zahlen.

	I	II	III	
A	$\sqrt{8}$	$\sqrt{98}$	$\sqrt{72}$	A
B	$\sqrt{162}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{2}$	B
C	$\sqrt{32}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{128}$	C
	I	II	III	

Bei nebenstehendem 3^2 feldrigen Quadrat ergibt sich in *jeder* waagrechten Reihe, in *jeder* senkrechten Reihe in *jeder* Diagonale als Summe 450. Ferner sind gleich die Summen der Radikanden in der Reihe I und Reihe III, denn $8+98+72=32+18+128$. Ferner ist die Summe Radikanden in der I. und III. senkrechten Reihe gleich, denn $8+162+32=72+2+128=202$. Es gilt ferner $(\sqrt{8}+\sqrt{98}+\sqrt{72})^n=(\sqrt{162}+\sqrt{50}+\sqrt{2})^n=(\sqrt{32}+\sqrt{18}+\sqrt{128})^n=(\sqrt{8}+\sqrt{162}+\sqrt{32})^n=(\sqrt{98}+\sqrt{50}+\sqrt{18})^n=$ etc. für beliebiges n. Ist n eine gerade Zahl, dann ergibt der Klammerwert stets eine rationale ganze Zahl, nämlich $(\sqrt{450})^n$. $n=2$ ergibt den Klammerwert 450; $n=4$ ergibt 450^2. Schlisslich gilt für beliebiges x die Relation $(\sqrt{8}+x)^2+(\sqrt{98}+x)^2+(\sqrt{72}+x)^2=(\sqrt{32}+x)^2+(\sqrt{18}+x)^2+(\sqrt{128}+x)^2$ und $(\sqrt{8}+x)^2+(\sqrt{162}+x)^2+(\sqrt{32}+x)^2=(\sqrt{72}+x)^2+(\sqrt{2}+x)^2+(\sqrt{128}+x)^2$.

ALFRED MOESSNER
(Nürnberg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XLIV, No. 10, Iunie 1939. Comemorarea Profesorului *G. Țițeica* de către Cercul Matematic al Societății de Științe din Cluj. Proprietăți ale pseudo-rombului, de *Stelian Cetățeanu.* Aplicație a punctului lui *Miquel,* Cuartica piriformă, de *N. Abramescu.* Asupra unor însumări, de *Eugen Vișa.* Asupra punctelor lui *Feuerbach,* de *Victor L. Florescu.* Raport pentru decernarea premiului „*V. Cristescu*". Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Revista de Ciencias,* anul XLI, No. 427, Martie 1939. Le problème principal de la balistique extérieure en deuxième et troisième approximation, par *Godofredo Garcia.* Le problème principal de de balistique extérieure dans la théorie de la relativité restreinte en deuxième approximation, par *Godofredo Garcia.* Sur les problèmes du Calcul des Variations dans le cas des intégrales simples dans lesquels les extrémités de la ligne de d'intégration sont variables sur des courbes ou sur des surfaces à points singuliers, par *Alfred Rosenblatt.* Observaciones a un trabajo sobre envolventes de las curvos planos, del Dr. *Cristóbal de bosada y Piga,* del *Emilio Solórzanto.* Apuntes sobre la Flora de la Quebrada, del *L. Herrera.* Sur les problèmes du Calcul des Variations des intégrales simples dans le cas des extrémités variables, par *Alfred Rosenblatt.* A differential equation whose solutions are self-reciprocal fonctions, by *E. C Titchmarsh.* Remarque sur l'addition des éléments, par *Karol Borsuk.*

3. *Boletin Matematico,* anul XII, No. 6, Mai 1939, Buenos Aires Proprietăți ale determinanților, de *A. Calderon.* Asupra teoremei lui *Ceva-Nannei:* Red. de Cevianas, de B. I. B. Probleme rezolvate și propuse

4. *Știință și Progres,* Revista Științifică a liceelor Militare, anul V, N-rile 9—10, 1939. † *G. Longinescu.* Un volum de enciclopedie consacrat problemei vieței, de Prof. *P. Sergescu.* Aplicați i ale omologiei, de Prof. *C. Ivănescu.* Recifii de coral, de Dr. *E. A. Pora.* Mecanica ondulatoare și aplicațiile ei, de *Valeriu Novac.* Coloranți organici, de Elev *Săndulescu I. Dumitru.* Sădirea pomilor, de Prof. *I. Mălăcea.* Probleme rezolvate și propuse.

5. *Pitagora,* anul IV, N-rile 8—9, 1939. Hexagone et dodécagone reguliers, par *V. Thébault.* Proprietăți în legătură cu parabola, de *N. Mihăilescu.* Relațiuni într'un patrulater, de *Adrian Gheorghiu.* Note matematice, de *A. Moessner, O. Mărculescu, C. Coșniță, C-tin Mocanu* și *Victor Florescu.* Probleme rezolvate și propuse.

6. *Dr. Erich Stern* Félicitation magique au 75e anniversaire du Général *E. Cazalas,* le 30 Avril 1939. („*Sphinx*" IX. p. 65—66).

7. *Michaïl St. Botez.* Su la somma di alcune succesïonidi numeri. (Extratto, dal Bolletino di Matematica).

8. *Mihail Șt. Botez.* Concepția Idealistă a Matematicilor în Antichitate. (Extras din Revista „Orizonturi").

PROBLEME REZOLVATE

1371. — *Să se construiască un triunghiu, cunoscând o latură, raportul celorlalte două și una din înălțimi. Discuție.*

GH. D. SIMIONESCU

Fie A B C un triunghiu ale cărei înălțimi A A′, B B′, CC′ se întâlnesc în H. Se cunosc: latura B C = a, raportul

$$\frac{A B}{A C} = k$$

și o înălțime. Deosebim 3 cazuri, după înălțimea ce se cunoaște; în toate cazurile presupunem $k > 1$, căci astfel se pot schimba pe figură notațiile B cu C.

1°. *Cazul I. Se cunoaște înălțimea* A A′ = h_a.

Se știe că punctul A, ale cărui distanțe la două puncte fixe B, C sunt într'un raport k, se găsește pe un cerc cu centrul O pe B C. Diametrul D D′ așternut pe B C este astfel în cât

$$\frac{D B}{D C} = \frac{D' B}{D' C} = k \tag{1}$$

pentru un k dat, nefiind de cât două puncte D, D′ care verifică egalitățile (1).

Un al doilea loc a lui A este o paralelă cu B C și la distanța h_a de B C, De aici urmează construcția:

Se iau intersecțiile A, A_1 ale cercului de diametru D D′ cu paralela la B C la distanța h_a. Condiția de posibilitate este

$$h_a \leq O D. \tag{2}$$

Pe figură avem

$$O D = \frac{C D + C D'}{2}$$

iar din (1) se scoate

$$C D = B C \frac{1}{k+1} = \frac{a}{k+1},$$

$$C D' = B C \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{a}{k-1},$$

așa că

$$O D = \frac{a k}{k^2 - 1}$$

și condiția (2) devine

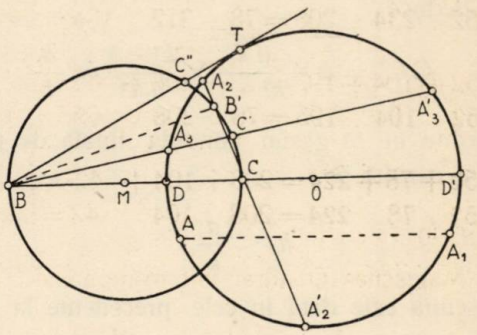
$$h_a \leq \frac{a k^2}{k^2 - 1}. \tag{3}$$

Vom avea deci 2, 1 sau nici o soluție, după cum sunt îndeplinite condițiunile (3).

Dacă se ia simetricul lui A față de B C se mai obțin o serie de soluții de poziție.

2°. *Cazul II. Se cunoaște înălțimea* B B′ = h_b.

Punctul B′ se găsește la intersecția cercului M de diametru B C, cu cercul de centru B și rază h_b.



Unind C cu B′ se obțin două puncte A_3, A'_2 pe cercul O, deci triunghiurile B A C și B A'_1 C.

Condiția de posibilitate este

$$h_c < a$$

în care caz problema are totdeauna două soluții Simetricul lui B′ față de B C mai dă 2 soluții de poziție.

3°. *Cazul III. Se cunoaște* C C′ = h_c.

Punctul C′ se află la intersecția cercului M de la 2° cu cercul de rază h_c și cu centrul în C. O primă condiție de posibilitate a problemei este

$$h_c < a. \tag{4}$$

Dreapta B C′ taie cercul O în punctele A_3, A'_3 dând soluțiile B A C și B A_2 C. Simetricul lui C′ față de B C mai dă două soluții de poziție.

Fie B T tangenta din B la cercul O și C″ intersecția acestei tangente cu cercul M Se vede pe figură că punctele A și A_2 de pe cercul O se pot obține numai dacă

$$h_c \leq C C'', \tag{5}$$

Dar triunghiurile dreptunghice C C″ B și O T B dau

$$\frac{C C''}{B C} = \frac{O T}{O B} = \frac{O D}{O B}$$

* * *

$$C C'' = a \frac{O D}{O B}.$$

Dar

$$OB = OD + DB$$

şi ţinând seamă de (1) şi de cele stabilite la 1°

$$OB = \frac{ak}{k^2-1} + \frac{ak}{k+1} = \frac{ak^2}{k^2-1}.$$

Se deduce

$$CC'' = a \times \frac{ak}{k^2-1} \times \frac{k^2-1}{ak^2} = \frac{a}{k}$$

şi ducând în (5) găsim condiţia finală de posibilitate a cazului 3°

$$h_c \leq \frac{a}{k}.$$

Discuţia este dată în cele precedente la fiecare caz în parte.

S'au primit soluţii bune de la d-nii: *Chirvai I. V.* Beiuş), *Herman A. V.* (Cluj), *Hompola I. T.* (Beiuş), *Mihalcea V. V.* (Beiuş), *Negrea A. L. M.* (Brăila), *Postelnicescu C. M.* (Târgovişte) şi *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. M-rea Dealu).

Pentru generalizare a se vedea problema 5062 propusă de D-l G-l *Gh. Buicliu* la pag. 277, vol. XLIV, *Gazeta Matematică*, unde se cere construcţia unui triunghiu căruia i se cunoaşte poziţia şi mărimea bazei BC, valoarea unei înălţimi şi un cerc pe care se află vârful A.

1502. — *Fie* $\overline{A_1B_1}$ *şi* $\overline{A_2B_2}$ *două segmente paralele,* B *intersecţia dreptelor* $\overline{A_1B_2}$ *şi* $\overline{A_2B_1}$, A *intersecţia paralelei dusă prin* B *la* $\overline{A_1B_1}$ *cu dreapta* $\overline{A_1A_2}$, C *intersecţia dreptelor* $\overline{AB_1}$ *şi* $\overline{A_1B}$, D *intersecţia dreptelor* $\overline{AB_2}$ *şi* $\overline{A_2B}$, C_1 *şi* D_1 *intersecţiile dreptei* $\overline{AA_2}$ *cu paralelele la* $\overline{A_1B_1}$ *duse respectiv prin* C *şi* D; *şi* I *intersecţia dreptelor* $\overline{CD_1}$ *şi* $\overline{C_1D}$.

Să se arate că $\overline{AB} = 3\overline{AI}$.

LT. C. D. IONESCU-ŢIU

1°. *Soluţie geometrică.* Vom arăta mai întâi, că $\overline{CD_1}$ şi $\overline{C_1D}$ se taie pe AB; observăm că

$$\frac{AC_1}{CC_1} = \frac{AA_1}{A_1B_1}; \quad \frac{AD_1}{DD_1} = \frac{AA_2}{A_2B_2}$$

dar

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1B}{BA_2} = \frac{AA_1}{AA_2} \quad *** \quad \frac{AA_1}{A_1B_1} = \frac{AA_2}{A_2B_2}$$

deci

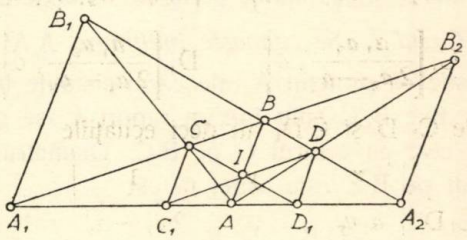
$$\frac{AC_1}{CC_1} = \frac{AD_1}{DD_1}$$

sau

$$\frac{AC_1}{AD_1} = \frac{CC_1}{DD_1} = \frac{CI}{ID_1}$$

deci AI e paralelă cu DD_1 sau suprapusă pe AB.

Se observă acum, pe figură, că



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{A_2A}{A_2A_1}; \quad \frac{AB}{A_2B_2} = \frac{A_1A}{A_2A_1}$$

deci

$$\frac{AB}{A_1B_1} + \frac{AB}{A_2B_2} = 1$$

sau

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{A_2B_2}$$

analog

$$\frac{1}{CC_1} = \frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{AB}; \quad \frac{1}{DD_1} = \frac{1}{A_2B_2} + \frac{1}{AB}$$

deci:

$$\frac{1}{IA} = \frac{1}{CC_1} + \frac{1}{DD_1} = \frac{2}{AB} + \left(\frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{A_2B_2}\right) = \frac{3}{AB}$$

adică $\overline{AB} = 3 \times \overline{IA}$. c. c. t. d.

2°. *Soluţie analitică.* Alegem ca axe coordonate $Ox \equiv A_1A_2$ şi $Oy \equiv AB$; notăm $A_1(a_1, o)$, $A_2(a_2, o)$, $B(o, b)$ şi avem ecuaţiile

$$(A_1B) \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1$$

$$(A_2B) \quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b} = 1$$

de unde rezultă coordonatele

$$B_1\left[a_1, b\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)\right]; \quad B_2\left[a_2, b\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)\right]$$

şi dreptele

$$(AB_1)\quad \frac{y}{x}=b\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$$

$$(AB_2)\quad \frac{y}{x}=b\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)$$

se obţine simplu, coordonatelor punctelor

$$C\left[\frac{a_1a_2}{2a_2-a_1},\ b\frac{a_2-a_1}{2a_2-a_1}\right];\ D\left[\frac{a_1a_2}{2a_1-a_2},\ b\frac{a_1-a_2}{2a_1-a_2}\right]$$

$$C_1\left[\frac{a_1a_2}{2a_2-a_1},\ o\right];\qquad D_1\left[\frac{a_1a_2}{2a_1-a_2};\ o\right],$$

dreptele C_1D şi CD_1 au deci ecuaţiile

$$(C_1D)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1\\ a_1a_2 & o & 2a_2-a_1\\ a_1a_2 & b(a_1-a_2) & 2a_1-a_2\end{vmatrix}=o$$

$$(CD_1)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1\\ a_1a_2 & o & 2a_1-a_2\\ a_1a_2 & b(a_1-a_2) & 2a_2-a_1\end{vmatrix}=o.$$

Se observă că minorii lui y şi 1 în cei doi determinanţi sunt aceeaşi deci $x=o$, adică punctul de intersecţie este pe axa Oy sau AB şi determinanţii se reduc la

$$\begin{vmatrix} o & y & 1\\ 1 & o & 2a_2-a_1\\ 1 & b(a_1-a_2) & 2a_1-a_2\end{vmatrix}=0$$

de unde $y=\frac{b}{3}$. c. c. t. d.

Foarte bune soluţii analitice date de d-nii: *Marius Borneas* (lic. Arad), *Petre V. Cazanachi* (Chişinău), *Octavian I. Mureşan* (lic. Arad) şi *Alexandru N. Popescu-Zorica* (Bucureşti).

N. M.

1597. — *Se dă un patrat* $ABCD$ *de latură* a. *Pe latura* AB *se construeşte un triunghiu echilateral* ABM. *In* A *şi* B *se ridică perpendiculare respectiv pe* DM *şi* CM, *care se întâlnesc în punctul* S. *Să se arate:*

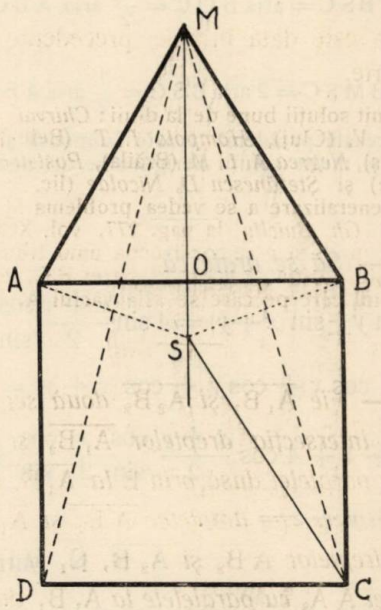
1°. *că patrulaterul* $BMSC$ *este romb.*

2°. *că suprafaţa rombului este* $\frac{a^2}{2}$.

Lt. Marin C. I. Vlad

1°. Fie O mijlocul laturei AB. Se observă mai întâi, din cauza simetriei, că perpendicularele din A şi B, se întâlnesc pe MO.

Prin construcţie $MB=BC=a$, deci triunghiul MBC e isoscel, adică $\sphericalangle BMC=\sphericalangle BCM=\sphericalangle CMS$, ultimele ca alterne interne; rezultă că MC este bisectoarea unghiului BMS; cum ea este şi perpendiculară pe SB, prin construcţie, triunghiul BMS e isoscel, adică MS este egal cu MB sau egal şi paralel cu BC şi figura este un paralelogram. Având şi laturele egale cu a— paralelogramul este romb.



2°. Aria rombului este produsul dintre bază şi înălţime $=BC\times OB=a\times\frac{a}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Soluţii date de d-nii: *Andrievici N.* (lic. Milit., M-rea Dealu), *Andrunachievici A. V.* (student, Iaşi), *Nicolae N. Aniţescu* (Focşani), *Bakonyi C.* (lic. Timişoara), *Berindei L. T.* (bacalaureat), *Cetăţeanu St.* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Hristache Dăscălescu* (Focşani), *Diaconescu D. I.* (lic. Turnu-Severin), *Diaconescu M.* (lic. Milit., M-rea Dealu), *Gligor N. I.* (lic. Arad), *Jidanu I. C.* (lic. Beiuş), S-Lt *Corneliu Lupescu* (Roman), *Matei D. D.* (bacalaureat, Iaşi), *Mihăileanu C. A.* (lic. Arad), *Modâlcă S. E.* (lic Turnu-Severin), *Motăş C.* (lic. Internat, Iaşi), *Pasere E.* (lic. Milit., Târgu-Mureş), *Petrescu C. A., Petrescu P. B.* (lic. Milit, M-rea Dealu), *Popoviciu M.* (lic. Lugoj), *Roth I. A.* (lic. Arad), *Săruleşteanu I. E.* (Bucureşti), *Slavov I.* (Bolgrad), *Solomon I.* (Iaşi), S-Lt *Marin F. Ştefănescu* (Alba Iulia).

Observare. 1°. Triunghiul echilateral se poate construi şi interior şi exterior pe A B. Propoziţiile problemei odată cu demonstraţia se aplică în exact acelaş fel, fără nici-o modificare de litere. *)

2°. *a.* Ca variante ale punctului 2° ale problemei, D-l *Ion D. Diaconescu* face frumoasa observaţie că triunghiul D S C fiind echilateral şi egal cu A M B atunci scoţând din patrat triunghiul D S C şi punând-ul deasupra, romburilor A M S C şi B M S C fac împreună cât patratul A B C D şi un singur romb va avea jumătate din arie.

b. D-nii *N Andrievici* şi *M. Diaconescu,* calculează

$$MC = a\sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad SB = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

de unde, aria $= \frac{1}{2} MC \times SB = \frac{a^2}{2}$.

c. Mutăm vârful S al triunghiului B S C pe paralela S O la B C şi scriem

$$\text{aria } BSC = \text{aria } BOC = \frac{1}{2} \text{ aria } ABCD,$$

deci

$$\text{aria } BMSC = 2 \text{ aria } BSC = \frac{1}{2} \text{ aria } ABCD.$$

3°. La această problemă foarte frumoasă şi elementară s'a primit şi multe soluţii neriguroase ori necomplete.

N. M.

1657. — *Să se arate că*

$$\sin x + \sin y \pm \sin(x+y) = 4 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2},$$

$$\cos x + \cos y \pm \cos(x+y) =$$

$$\mp 1 + 4 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2},$$

cazul $x+y+z = n\pi$.

N. N. MIHAILEANU

Insemnăm cu E prima parte a primei relaţii şi scriem

$$E = \sin x + \sin y \pm \sin(x+y) =$$

$$2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x+y}{2} \pm 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x+y}{2} =$$

$$2 \sin\frac{x+y}{2}\left[\cos\frac{x-y}{2} \pm \cos\frac{x+y}{2}\right] =$$

$$4 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2}$$

căci

$$\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} = 2 \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2},$$

$$\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2} = 2 \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2}.$$

In acelaş fel, avem

$$F = \cos x + \cos y \pm [\cos(x+y) + 1] =$$

$$2 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} \pm 2 \cos^2\frac{x+y}{2} =$$

$$2 \cos\frac{x+y}{2}\left[\cos\frac{x-y}{2} \pm \cos\frac{x+y}{2}\right] =$$

$$4 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2}.$$

In cazul particular $x+y+z = n\pi$, dacă $n = 2k$,

$$x+y = 2k\pi - z, \qquad \sin(x+y) = -\sin z,$$

$$\cos(x+y) = \cos z$$

$$\sin\frac{x+y}{2} = -\cos k\pi \sin\frac{z}{2} = (-1)^k \sin\frac{z}{2};$$

$$\cos\frac{x+y}{2} = (-1)^k \cos\frac{z}{2}$$

şi relaţiile devin

$$\sin x + \sin y \mp \sin z = -4(-1)^k \cos\frac{z}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2},$$

$$\cos x + \cos y \pm \cos z = \mp 1 +$$

$$4(-1)^k \cos\frac{z}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2}.$$

Dacă $n = 2k+1$,

$$x+y = 2k\pi + \pi - z, \qquad \sin(x+y) = \sin z,$$

$$\cos(x+y) = -\cos z,$$

$$\sin\frac{x+y}{2} = \cos k\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{z}{2}\right) =$$

$$(-1)^k \cos\frac{z}{2}, \quad \cos\frac{x+y}{2} = (-1)^k \sin\frac{z}{2}$$

şi relaţiile devin

$$\sin x + \sin y \pm \sin z = 4(-1)^k \cos\frac{z}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2},$$

$$\cos x + \cos y \mp \cos z = \mp 1 +$$

$$4(-1)^k \sin\frac{z}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2}.$$

*) De altfel, e suficient să se întoarcă figura de 180°.

În particular, într'un triunghiu, $n=1$, $k=0$ deci

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2},$$

$$\cos x+\cos y+\cos z=1+4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}.$$

Problema 1657 generalizează aceste relații.

Au trimis soluții D-nii: *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., M-rea Dealu), *Cetățeanu Stelian* (lic. Șincai, București), *Diaconescu D. Ion* (lic. Turnu-Severin), *Gligor N. I.* (lic. Arad), *Jidanu I. C.* (lic. Beiuș), *Mihăileanu A. Călin* (lic. Arad), *Papadopol D. Elena* (lic. de fete, Bacău), *Stoenescu D. M.* (lic Milit., M-rea Dealu).

1673. — *Să se rezolve sistemul de ecuații*

$$\begin{cases} 2\sin x(\sin x+1)+2\sin y(\sin y+1)+ \\ \qquad 2\sin z(\sin z+1)=3 \\ 2\sin x(\sin x-1)+2\sin y(\sin y-1)+ \\ \qquad 2\sin z(\sin z-1)=3 \\ 4\sin x\cos^2 x+4\sin y\sin y\cos^2 y+4\sin z\cos^2 z=3. \end{cases}$$

I. CUREA

Inlocuim $\sin x=u$, $\sin y=v$, $\sin z=w$ și sistemul devine

$$\begin{cases} u(u+1)+v(v+1)+w(w+1)=\dfrac{3}{2} \\ u(u-1)+v(v-1)+w(w-1)=\dfrac{3}{2} \\ u(1-u^2)+v(1-v^2)+w(1-w^2)=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Din primele două ecuații, rezultă

$$u+v+w=0$$

și sistemul este echivalent cu următorul

$$(1)\qquad \begin{cases} u+v+w=0 \\ u^2+v^2+w^2=\dfrac{2}{3} \\ u^3+v^3+w^3=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

ridicăm prima relație la patrat și ținem seamă de a doua

$$u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+vu)=0$$

$$**\qquad uv+vw+wu=-\frac{3}{4}.$$

Apoi se știe, că dacă

$$u+v+w=0 \quad \text{și} \quad u^3+v^3w^3=3uvw$$

deci

$$uvw=-\frac{1}{4};\ \text{adică}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} u+v+w=0 \\ uv+vw+wu=-\dfrac{3}{4} \\ uvw=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

u, v, w sunt deci rădăcinile ecuației

$$(3)\qquad t^3-\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}=(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

adică $u=-1$, $v=w=\dfrac{1}{2}$ de unde

$$\sin x=-1,\qquad x=\frac{4k-1}{2}\pi$$

$$\sin y=\sin z=\frac{1}{2},\quad y=z=\left(2k+\frac{3\pm 2}{6}\right)\pi.$$

Sistemul fiind simetric, valorile precedente se pot permuta oricum.

Soluții date de d-nii: *Areșteanu Hero* (VI: lic. Gh. Lazăr, București), *Bârlea V. Suhățean* (lic M-rea Dealu), *Borneas Marius* (lic. Arad), *Buznea D. Dinu* (VI: lic. mil. M-rea Dealu), *Cerchez Mihu* (Chișinău), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Diaconescu Marcel* (VI: lic. mil. M-rea Dealu), *Dragon I. Gheorghe* (Șc. polit. București), *Gligor N. Ioan* (VI: lic. Arad), *Jidanu I. C.* (lic. Beiuș), *Lupescu Corneliu* (sublt. Roman), *Modâlcă S. Emil* (lic. Turnu-Severin), *Mureșan I. Octavian* (lic. Arad), *Popa D. Mircea* (VI: lic. mil. Iași), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Ștefan C. Tilică* (Tâmna, Mehedinți), *Stoenescu D. Mirel* (VI: lic. mil. M-rea Dealu), *Venter D-tru* (lic. Beiuș).

Observare: 1°). Dela relațiile (1) se poate ajunge mai iute la ecuația (3), căci fiind dată o ecuație forma

$$t^3+pt+q=0$$

cu rădăcinile u, v, w, avem intre aceste rădăcinii relațiile[1])

$u+v+w=0$, $u^2+v^2+w^2=-2p$, $u^3+v^3+w^3=-3q$

de unde

$$p=\left(\frac{3}{2}\right):(-2)=-\frac{3}{4}\ \text{și}\ q=\left(-\frac{3}{4}\right):(-3)=\frac{1}{4}\ \text{etc.}$$

[1]) *Ioan Curea:* Asupra rezolvării sistemelor de ecuații de grad superior R. M. T. XVII—27.

Au rezolvat problema pe această cale, d-nii: *Cetățeanu Stelian* (lic. Șincai, București), *Lepolszky C.*, *Stamate I. Ionel* (bac. Lugoj).

2°. D-l Sublt. *Marin F. Ștefănescu* (Alba-Iulia), pornind dela sistemul (1), află ecuația

$$t^3 + p\,t^2 + q\,t + r = 0 \tag{3}$$

cu relațiile *Newton*.

$$\begin{cases} \sum u + p = 0 \\ \sum u^2 + p \sum u + 2q + 0 \\ \sum u^3 + p \sum u^2 + q \sum u + 3r = 0 \end{cases}$$

deci $p = 0, \quad q = -\frac{3}{4}, \quad r = \frac{1}{4}$.

3°. N'au lipsit nici soluțiile greșite, unele dela foarte buni corespondenți.

N. M.

PROBLEME PROPUSE

1784. — Să se găsească numărul întreg N al cărui patrat se obține scriind pe $N \pm 1$ între cifrele a și b.

G-L GH. BUICLIU

1785. — Să se arate că expresia

$$E = 10^{5k+1} - 10^{4k+1} - 10^{1k+1} + 10^{2k+1} + 10^{3k} - 10^{2k} - 10^k + 1.$$

este divizibilă prin 1089, oricare ar fi întregul pozitiv k.

I. I. STAMATE

1786. — Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} a\,x + a\,y + z = p \\ x - y + z = q \\ x + a\,y + a\,z = p \end{cases}$$

EUGEN VISA

1787. — Presupunând $a \neq 0$ să se determine m prin condiția ca sistemul

$$m\,x + (m - a)\,y + (m + a)\,z = m + 3\,a$$

$$(m - a)\,x + m\,y + (m - 2\,a)\,z = m + 4\,a$$

$$(m + a)\,x + (m - 2\,a)\,y + m\,z = m + 2\,a$$

$$(m + 3\,a)\,x + (m + 4\,a)\,y + (m + 2\,a)\,z = m$$

să fie compatibil și să se rezolve în acest caz.

CORNELIA NANES

1788. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y = u^4 \\ x^2 + b\,x\,z = v^2 \end{cases}$$

Se cere o soluție cuprinzând trei parametri.

1789. — Se consideră un triunghiu A B C având unghiurile ascuțite.

Fie A', B', C', punctele unde înălțimele triunghiului taie a 2^a oară cercul circumscris. Se cere:

1. Să se găsească suprafața patrulaterului A B A' C în funcție de elementele triunghiului dat.

2. Ce relație trebuie să existe între unghiurile triunghiului A B C pentru ca suprafața calculată la numărul precedent să fie nulă. Să se verifice rezultatul geometric.

3. Să se arate că suprafața exagonului AB'CAB C' este egală cu de două ori suprafața triunghiului A B C. Să se verifice rezultatul geometric.

GH TH. GHEORGHIU

1790. — Să se găsească unghiul format de tangentele exterioare cercurilor O și O' tangente exterioare, știind că raportul razelor lor este n. Pentru ce raport unghiul căutat este α. Cazuri particulare:

$$n = 3, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}.$$

TIBERIU I. HOMPOLA

1791. — Dacă x este unul din unghiurile ascuțite ale unui triunghiu dreptunghic, să se demonstreze relația:

$$sp\,\frac{x}{2} = \frac{\sin 3\,x}{1 + 2\cos x + 2\cos 2\,x + \sin 3\,x + \cos 3\,x}$$

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. (1693, 1702, 1713, 1727, 1730, 1733, 1734, 1741, 1746, 1751, 1752, 1757, 1760, 1765, 1766, 1768, 1774, 1775, 1777, 1778); *Bighea Ion* (P., 1734, 1761); *Boiangiu D.* (P., 1659, 1758, 1770, 1777, 1778); *Chertman S M.* (N, 1674, 1684, 1688, 1690, 1696, 1703, 1704, 1729, 1736, 1751); *Enulescu A. Ovidiu* (N); *Gligor N Ioan* (1683, 1689, 1720, 1735, 1752, 1757, 1766); *Jidanu I C-tin* (N, 1777, 1778, 1783); *Luca I. I.* (1699, 1760, 1766); *Lupescu Corneliu* (1684, 1690, 1692, 1693, 1696, 1697, 1703, 1720, 1727, 1729, 1730, 1741;) *Mahrenholz Johannes* (1778, 1779, 1785); *Modâlcă S. Emil* (1726, 1741, 1757); *Papadodol D. Elena* (1699, 1758, 1777); *Stamate I Ionel* (N); *Stoenescu D Mirel* (1682, 1685, 1688, 1690, 1691, 1696, 1697, 1700, 1703, 1748); *Tica P. Marin-Gal* (P., 1725, 1729, 1734, 1745, 1777, 1778); *Văduva F Marin* (P., 1674, 1688, 1692, 1727, 1748, 1751, 1777).

INFORMAȚIUNI

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XII-LEA

care a început în Martie 1939.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XII, care a început în Martie 1939, s'a primit până acum la Redacția „R. M. T." următorul abonament:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Prețul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Acei care se interesează de identitățile în numere întregi de diferite grade, în special cu problemele *Tarry*, sunt rugați a intra în corespondență cu mine, *Alfred Moessner* Nürnberg (Germania), Grolandstrasse 79.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XVIII, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Rugăm pe corespondenții nostrii, a ne trimete de urgență costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XIX, care a început la 15 Martie 1939.

ANUL XIX. SEPTEMVRIE—OCTOMVRIE—NOEMVRIE 1939 NO. 7-8-9

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI: TRIGONOMETRIA PATRATICA.
2. NOTE MATEMATICE: 11.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1406, 1748.
5. PROBLEME PROPUSE: 1792-1800.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Cu plăcere anunţăm că începând dela 15 Septemvrie 1939, mai fac parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara" *şi distinşii d-nii profesori:*

1. **Origen Mărculescu,** *profesor la liceul* „Carol I.", *Craiova.*
2. **Eugen Vişa,** *licenţiat în Matematici, profesor la liceul Militar Târgu-Mureş. (Strada Godju No. 5).*

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XIX -- No 7—9 TIMISOARA, SEPTEMVRIE—OCTOMVRIE—NOEMVRIE 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ.

DE
V. ALACI
PROFESOR

PARTEA IV-a

(urmare)

Ecuații algebrice cu rădăcini funcțiuni trigonometrice, circulare sau patratice.

Vom soluționa următoarele două probleme, una în care intră *funcțiuni circulare* și alta în care intervin *funcțiuni patratice.*

156. **Problemă.** *Să se formeze ecuația algebrică cu rădăcinele:*

$$(63)\qquad x=\frac{\sin\frac{k\pi}{m}}{\sin\frac{k\pi}{m}+\cos\frac{k\pi}{m}},\quad (k=1,2,\ldots,m-1).$$

Soluție. In baza unei proprietăți a rapoartelor egale deducem din (63):

$$\frac{x}{1-x}=\frac{\sin\frac{k\pi}{m}}{\cos\frac{k\pi}{m}}.$$

Multiplicând cu $i=\sqrt{-1}$ ambii membrii și aplicând iarăși o proprietate cunoscută a rapoartelor egale, obținem:

$$\frac{1-x+ix}{1-x-ix}=\frac{\cos\frac{k\pi}{m}+i\sin\frac{k\pi}{m}}{\cos\frac{k\pi}{m}-i\sin\frac{k\pi}{m}}=e^{\frac{2ik\pi}{m}}.$$

Ridicăm la puterea m și avem

$$\left(\frac{1-x+ix}{1-x-ix}\right)^m=1,$$

sau:

$$(64)\qquad [1-(1-i)x]^m-[1-(1+i)x]^m=0.$$

Efectuând calculele și lăsând la o parte rădăcina străină $x=0$, găsim

$$C_m^1[(1+i)-(1-i)]-C_m^2[(1+i)^2-(1-i)^2]x+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{m-1}C_m^m[(1+i)^m-(1-i)^m]x^{m-1}=0,$$

ecuație care se mai poate scri:

$$(65)\qquad \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C_m^k[(1+i)^k-(1-i)^k]x^{k-1}=0.$$

Dar,

$$(1+i)^k-(1-i)^k=2^{\frac{k}{2}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^k-\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^k\right]=2^{1+\frac{k}{2}}\,i\sin\frac{k\pi}{4},$$

astfel că ecuația (65) devine:

$$(63')\qquad \boxed{\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}2^{\frac{k}{2}}\sin\frac{k\pi}{4}C_m^k x^{k-1}=0}.$$

Pentru $k=1, 2, 3, \ldots, 8, \ldots$ observăm că $\sin\frac{k\pi}{4}$ ia respectiv următoarele 8 valori

$$(66)\qquad 2^{-\frac{1}{2}},\quad 1,\quad 2^{-\frac{1}{2}},\quad 0,\quad -2^{-\frac{1}{2}},$$
$$-1,\quad -2^{-\frac{1}{2}},\quad 0,\ldots,$$

care apoi se repetă periodic.

Avem astfel dreptul a afirma că (63') *este ecuația algebrică cu rădăcinele* (63).

Observări. 1°. Dacă $m=2p$ (p întreg pozitiv), ecuația (63'), sau (64), se descompune în următoarele ecuații:

$$\begin{cases}[1-(1-i)x]^p-[1-(1+i)x]^p=0\\ [1-(1+i)x]^p+[1-(1+i)x]^p=0\end{cases}$$

sau:

$$(67)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k [(1+i)^k - (1-i)^k] x^{k-1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} C_p^k [(1+i)^k + (1-i)^k] x^k = 2. \end{cases}$$

Cum avem

$$(1+i)^k - (1-i)^k = 2^{1+\frac{k}{2}} i \sin \frac{k\pi}{4}$$

$$(1+i)^k + (1-i)^k = 2^{1+\frac{k}{2}} \cos \frac{k\pi}{4},$$

urmează că ecuațiile (67) devin

$$(63'')\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} 2^{\frac{k}{2}} \sin \frac{k\pi}{4} C_p^k x^{k-1} = 0 \\ \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} 2^{\frac{k}{2}} \cos \frac{k\pi}{4} C_k^p x^k = 1. \end{cases}$$

In aceste ecuații, $\sin \frac{k\pi}{4}$, pentru $k=1,2,3,\ldots,8,\ldots$, ia valorile din (66), iar $\cos \frac{k\pi}{4}$ pentru $k=1,2,\ldots,8,\ldots$ ia valorile

$$(68)\quad 2^{-\frac{1}{2}},\quad 0,\quad -2^{-\frac{1}{2}},\quad -1,\quad -2^{-\frac{1}{2}},\quad 0,\quad 2^{-\frac{1}{2}},\quad 1,\ldots,$$

care apoi se repetă periodic.

Pentru $m=2p$, vedem că ecuația (63') se înlocuește prin ecuațiile (63''), iar rădăcinele acestor ecuații sunt de forma (63). Prima din ecuațiile (63'') admite acele rădăcini (63), care corespund pentru $k=2, 4, 6, \ldots, 2(p-1)$, iar a 2-a ecuație din (63'') admite acele rădăcini (63) ce corespund pentru $k=1, 3, 5, \ldots, 2p-1$.

2°. Dacă $m=4p$, coeficientul lui x^{m-1} din (63') este zero, cum reiasă din șirul (66), astfel că ecuația (63') are o rădăcină $x=\infty$, ce corespunde pentru $k=3p$.

157. **Problemă.** *Să se formeze ecuația algebrică cu rădăcinele*

$$(69)\qquad x = sp \frac{k\pi}{m}, \qquad (k=1,2,\ldots,j),$$

unde $j=\frac{m-1}{2}$, sau $\frac{m}{2}$, după cum m este impar, sau par.

Soluție. Pentru $k=1,2,\ldots,j$ având

$$\frac{k\pi}{m} \leq \frac{\pi}{2},$$

urmează că putem scri

$$(70)\quad x = sp \frac{k\pi}{m} = \frac{\sin \frac{k\pi}{m}}{\sin \frac{k\pi}{m} + \cos \frac{k\pi}{m}}, \quad (k=1,2,\ldots,j),$$

în baza primei formule din tabloul (11), (P. I[a]).

Privind relația (70), vedem că formarea ecuației cu rădăcinele (69), este identică cu formarea ecuației cu rădăcinele (63) din problema precedentă.

Dar ecuația cu rădăcinele (63), am arătat că este (63'), anume:

$$(69')\qquad \boxed{\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} 2^{\frac{k}{2}} \sin \frac{k\pi}{4} C_m^k x^{k-1} = 0}.$$

Această ecuație prin urmare, admite toate rădăcinele (69) în număr de j, numai că fiind de gradul $m-1$ admite și rădăcini străine.

Aceste rădăcini străine sunt evident,

$$x = \frac{\sin \frac{k\pi}{m}}{\sin \frac{k\pi}{m} + \cos \frac{k\pi}{m}},$$

pentru $k=j+1,\ j+2,\ldots,\ m-1$ și sunt de două feluri: unele mai mari ca 1, altele negative, după cum

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{k\pi}{m} \leq \frac{3\pi}{4}, \qquad \text{sau} \qquad \frac{3\pi}{4} < \frac{k\pi}{m} < \pi.$$

In concluzie, numai rădăcinele ecuației (69') cuprinse între 0 și 1 inclusiv, sunt de forma (69).

Cazuri particulare. 1°. Pentru $m=5$ ecuația (69') simplificată, devine

$$(71)\qquad 4x^4 - 20x^3 + 20x - 5 = 0,$$

iar rădăcinele ei sunt:

$$x_1 = sp \frac{\pi}{5}, \qquad x_2 = sp \frac{2\pi}{5},$$

$$x_3 = \frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}}, \qquad x_4 = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}}.$$

Observare. Ecuația (71) se descompune însă în ecuațiile

$$\begin{cases} 2x^2+2\sqrt{5}\,x-\sqrt{5}=0 \\ 2x^2-2\sqrt{5}\,x+\sqrt{5}=0, \end{cases}$$

care au respectiv rădăcinele:

$$x = \frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2},$$

$$x = \frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Dintre acestea, cele pozitive mai mici ca 1. în ordine de mărime, sunt $sp\frac{\pi}{5}$, $sp\frac{2\pi}{5}$, iar celelalte sunt x_3 și x_4.

Ecuația (71) are deci următoarele rădăcini:

$$x_1 = sp\frac{\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2},$$

$$x_2 = sp\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2},$$

$$(71') \quad x_3 = \frac{\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2},$$

$$x_4 = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}} = \frac{-\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}.$$

2°. Pentru $m = 6$ ecuația (69′) simplificată, devine:

$$(72) \quad 4x^5-12x^4+20x^2-15x+3=0,$$

iar rădăcinele ei sunt:

$$x_1 = sp\frac{\pi}{6}, \qquad x_2 = sp\frac{\pi}{3}, \qquad x_3 = sp\frac{\pi}{2},$$

$$x_4 = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}}, \qquad x_5 = \frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}}.$$

Observare. Ecuația (72), în virtutea observării 1° de la No. 156, se descompune în ecuațiile (63″), care în cazul nostru devin:

$$\begin{cases} 2x^2-6x+3=0 \\ 2x^3-3x+1=0. \end{cases}$$

Rădăcinele acestor ecuații sunt respectiv

$$x = \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}; \qquad x=1, \qquad x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},$$

dintre care acelea pozitive mai mici ca 1, în ordine de mărime sunt $sp\frac{\pi}{6}$, $sp\frac{\pi}{3}$, $sp\frac{\pi}{2}$, iar celelalte sunt x_4 și x_5.

Rezultă astfel că rădăcinele ecuației (72) sunt:

$$x_1 = sp\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \qquad x_2 = sp\frac{\pi}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = sp\frac{\pi}{2} = 1, \qquad x_4 = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$x_5 = \frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6}} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Câteva identități remarcabile.

158. Am arătat la No. 156 că, pentru $m = 2p$, ecuația (63′) este echivalentă cu ecuațiile

$$(73) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}2^{\frac{k}{2}}\sin\frac{k\pi}{4}C_p^k x^{k-1}=0 \\ \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}2^{\frac{k}{2}}\cos\frac{k\pi}{4}C_p^k x^k=1, \end{cases}$$

iar rădăcinele lor sunt de forma

$$(73') \qquad x = \frac{\sin\frac{k\pi}{2p}}{\sin\frac{k\pi}{2p}+\cos\frac{k\pi}{2p}},$$

ale primei corespund la $k = 2, 4, \ldots, 2(p-1)$, iar ale ecuației a 2ª din (73) corespund la $k = 1, 3, 5, \ldots, 2p-1$.

Rezultă din (73′) că, dacă p este par, prima ecuație din (73) admite rădăcina $x = 1$, iar dacă p este

impar a 2-a ecuație din (73) admite rădăcina $x=1$; (pentru $k=p$).

Inlocuind pe $x=1$ în ecuațiile (73), în cazurile specificate, obținem identitățile:

$$(74)\quad \boxed{\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}2^{\frac{k}{2}}\sin\frac{k\pi}{4}C_p^k=0,\ \text{pentru } p \text{ par}},$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}2^{\frac{k}{2}}\cos\frac{k\pi}{4}C_p^k=1,\ \text{pentru } p \text{ impar}}.$$

159. Am văzut că ecuația (63′), care dezvoltată se poate scri

$$(75)\quad C_m^1-2C_m^2x+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{m-2}2^{\frac{m-1}{2}}\sin\frac{(m-1)\pi}{4}C_m^{m-1}x^{m-2}+$$
$$(-1)^{m-1}2^{\frac{m}{2}}\sin\frac{m\pi}{4}x^{m-1}=0,$$

are rădăcinele:

$$(75')\quad x=\frac{\sin\frac{k\pi}{m}}{\sin\frac{k\pi}{m}+\cos\frac{k\pi}{m}},\quad (k=1,2,\ldots,m-1).$$

Scriind suma și produsul rădăcinelor ecuației (75) în funcție de coeficienți, obținem încă următoarele identități:

$$(76)\quad \boxed{\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin\frac{k\pi}{m}}{\sin\frac{k\pi}{m}+\cos\frac{k\pi}{m}}=\frac{m\sin\frac{(m-1)\pi}{4}}{\sqrt{2}\sin\frac{m\pi}{4}}}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{m}\frac{\sin\frac{k\pi}{m}}{\sin\frac{k\pi}{m}+\cos\frac{k\pi}{m}}=\frac{(-1)^{m-1}m}{2^{\frac{m}{2}}\sin\frac{m\pi}{4}}}.$$

Analog putem avea alte identități.

Observare. Pentru $m=4p$, membrii ai 2-lea din (76) devin infiniți, ceeace era de prevăzut, fiindcă în acest caz am arătat că ecuația (75) are o rădăcină infinită.

NOUI DOMENII DE CERCETARE.

160. *Funcțiunile patratice* de care ne-am ocupat, ne oferă posibilitatea de a pune în valoare alte *noui domenii de cercetare* și capitolele ce le vom trata în cele ce urmează, vor invedera în deajuns afirmațiunea făcută.

Aceste capitole, pe care le vom clarifica prin diferite probleme, privesc:

I. *Configurațiile liniare și curbilinii reprezentate parametric.*

II. *Transformarea patratică transcendentă.*

III. *Transformarea antipatratică.*

IV. *Coordonate patratice.*

V. *Integrarea funcțiunilor patratice.*

VI. *O problemă de mecanică soluționată prin funcțiuni patratice.*

I.

Configurații liniare reprezentate parametric.

161. **Problemă.** *Se cere configurația reprezentată parametric prin ecuațiile:*

$$(77)\quad \begin{cases} x=a\,cp\,\theta \\ y=a\,sp\,\theta \end{cases} \qquad (a>0).$$

Soluție. Schimbând θ în $-\theta$, x rămâne neschimbat, iar y își schimbă numai semnul, de unde rezultă că $x'x$ este axă de simetrie.

De asemeni, schimbând θ în $\pi-\theta$, y rămâne neschimbat, iar x își schimbă numai semnul, de unde rezultă că $y'y$ este axă de simetrie.

Rămâne să construim configurația cerută numai pentru $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$.

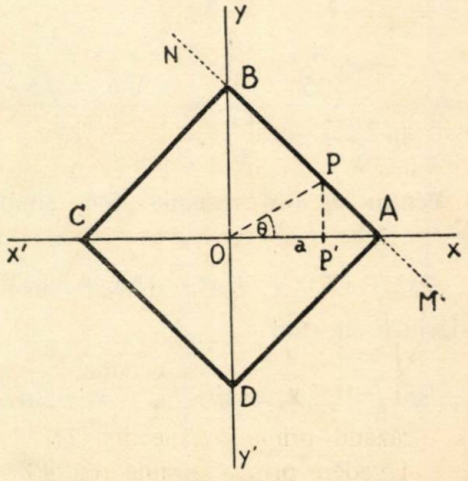


Fig. 39.

Pentru aceasta ducem dreapta MN care să taie axele în A și B, astfel ca $OA=OB=a$, (fig. 39).

Observăm acum că coordonatele $x = OP'$, $y = P'P$ ale unui punct oarecare P de pe segmentul AB, dacă notăm $\sphericalangle AOP = \theta$, sunt date tocmai de relaţiile (77), în virtutea *teoremei 1ª* (No. 49, P. IIª), aplicată triunghiului dreptunghic OP'P.

Orice alt punct $Q(x, y)$ ne situat pe AB, nu mai satisface ecuaţiilor (77), căci dacă prin el am duce o paralelă la AB ce ar întâlni axele în A_1, B_1 ($OA_1 = OB_1 = b$), coordonatele lui Q ar satisface evident, în baza aceleiaşi teoreme folosită mai sus, ecuaţiile

$$\begin{cases} x = b\,cp\,\theta \\ y = b\,sp\,\theta, \end{cases}$$

diferite de (77), cu care n'ar coincide de cât pentru $b = a$, dar în acest caz Q ar fi pe segmentul AB.

Pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, singurele puncte care fac parte din configuraţie sunt numai acelea situate pe segmentul AB.

Rezultă că, *configuraţia complectă reprezentată parametric prin ecuaţiile (77), este patratul* ABCD *de semidiagonală* $OA = a$ (fig. 39).

Observare. Vedem că parametrul unghiular θ, corespunzător unui punct P al patratului este tocmai unghiul polar al lui P. Nu totdeauna este astfel.

Soluţia 2ª. 1°. Dacă $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, reiasă din (77) inegalităţile

$$(78) \qquad \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a \end{cases} \quad \text{şi ecuaţia (79)} \quad x + y = a,$$

obţinută prin adunarea ecuaţiilor (77), având în vedere formula (4) (No. 11, P. Iª).

Interpretând geometric ecuaţia (79), şi inegalităţile (78), care au loc simultan, conchidem privind fig. 39 că, numai punctele de pe segmentul AB situat pe drepta (79) satisfac, în acest caz, ecuaţiile (77).

2°. Dacă $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, reiasă din (77) inegalităţile

$$\begin{cases} -a \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq a \end{cases} \quad \text{şi ecuaţia } y - x = a,$$

obţinută scăzând prima ecuaţie din (77) din a 2ª şi având în vedere prima formulă din (4') (No. 12, P. Iª).

Este uşor de observat că numai punctele situate pe segmentul BC satisfac condiţiilor de mai sus.

3°. Dacă $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, reiasă din (77) inegalităţile

$$\begin{cases} -a \leq x \leq 0 \\ -a \leq y \leq 0 \end{cases} \quad \text{şi ecuaţia } x + y = -a,$$

obţinută prin adunarea ecuaţiilor (77) şi având în vedere a 2ª formulă din (4') (No. 12, P. Iª).

Numai punctele situate pe CD satisfac condiţiile corespunzătoare acestui caz.

4°. Dacă $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, reiasă din (77) inegalităţile

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ -a \leq y \leq 0 \end{cases} \quad \text{şi ecuaţia } y - x = -a,$$

obţinută scăzând prima din ecuaţiile (77) din a 2ª şi având în vedere a 3ª dintre formule (4'), (No. 12, P. Iª).

Observăm cu uşurinţă că numai punctele situate pe segmentul DA, satisfac condiţiilor de mai sus.

Prin urmare, *configuraţia cerută este patratul* ABCD.

162. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$(79) \qquad \begin{cases} x = a\,cp\,\theta \\ y = b\,sp\,\theta \end{cases} \qquad (a > b > 0).$$

Soluţie. Dacă schimbăm θ în $-\theta$, x rămâne neschimbat, iar y îşi schimbă numai semnul, $x'x$ este deci axă de simetrie. Dacă schimbăm θ în $\pi - \theta$, y rămâne neschimbat şi x îşi schimbă numai semnul, ceiace înseamnă că $y'y$ este axă de simetrie.

Considerăm dar numai cazul $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Din (79), când θ variază, reiasă inegalităţile

$$(80) \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases} \quad \text{şi ecuaţia} \quad (81) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

obţinută prin adunarea ecuaţiilor (79) şi având în vedere formula (4) (No. 11, P. Iª).

Construim deci dreapta (81) şi reţinem numai segmentul AB, pentru a avea satisfăcute inegalităţile (80). Orice alt punct nesituat pe AB, din primul cadran, nu satisface ecuaţia (81).

Rezultă că segmentul AB situat pe dreapta (81), face parte din configuraţia cerută, iar în baza simetriei, *configuraţia complectă este rombul* ABCD *de semidiagonale* $2a$, $2b$ (fig. 40).

Determinarea lui θ corespunzător unui punct P *al conturului şi invers.*

1°. Fie P un punct, de exemplu pe latura A B, de coordonate

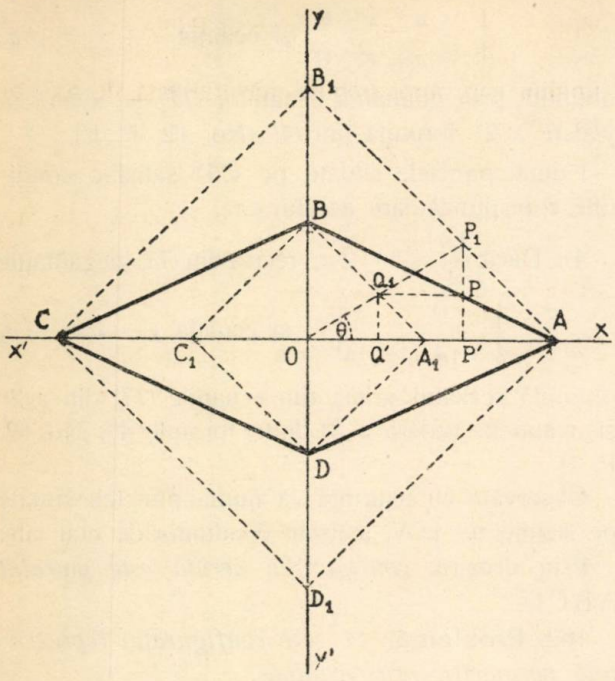


Fig. 40.

$$x = O\,P', \qquad y = P'\,P,$$

față de sistemul de axe format din diagonalele A C, D B.

Construim patratele auxiliare $A B_1 C D_1$ și $A_1 B C_1 D$ de semidiagonale $O\,A = O\,B_1 = a$, $O\,A_1 = O\,B = b$.

Prelungim ordonata P' P până întâlnește latura $A B_1$ în P_1, unim P_1 cu O și afirmăm că,

$$\sphericalangle\, A\,O\,P_1 = \theta.$$

In adevăr, în triunghiul dreptunghic $O\,P'\,P_1$, conform *teoremei 1ª* (No. 49, P. II[a]), avem

$$x = (O\,P' + P'\,P_1)\,cp\,\theta = a\,cp\,\theta,$$

prima din ecuațiile (79).

Iată cum stabilim și a 2ª ecuație din (79). Fie Q_1 intersecția lui $O\,P_1$ cu $A_1\,B$, fie $Q_1\,Q'$ perpendiculara din Q_1 pe O A și unim Q_1 cu P.

Dreapta $Q_1\,P$ este paralelă cu O A, căci din perechile de triunghiuri asemeni $P'\,A\,P_1$, $O\,A\,B_1$ și $O\,Q_1\,B$, $O\,P_1\,B_1$ reiasă:

$$\frac{P'\,P}{P\,P_1} = \frac{O\,Q_1}{Q_1\,P_1} = \frac{b}{a-b}.$$

Prin urmare $Q_1\,P \parallel O\,A$, deci

$$Q'\,Q_1 = P'\,P = y,$$

și din triunghiul dreptunghic $O\,Q'\,Q_1$ conform *teoremei 1ª* (No. 49, P. II[a]), deducem:

$$y = (O\,Q' + Q'\,Q_1)\,sp\,\theta = b\,sp\,\theta.$$

Unghiul θ este astfel bine determinat, căci satisface ecuațiile (79).

2°. *Invers.* Dacă ne dăm θ, punctul P corespunzător pe conturul rombului se află astfel. Prin O ducem o rază înclinată pe $O\,x$ de unghiul θ, care întâlnește în P_1 și Q_1 laturile $A\,B_1$, $A_1\,B$ ale patratelor auxiliare.

Prin P_1 și Q_1 ducem paralele respectiv la O A și O B, ele se vor întâlni într'un punct P situat tocmai pe conturul rombului, cum ușor înțelegem din cele expuse precedent. Astfel, oricărui unghiu θ îi corespunde în felul acesta un punct P bine determinat al rombului.

Privind atent figura, putem enunța următoarea remarcabilă problemă, motivată prin expunerea făcută.

Problemă. *Dacă se dau patratele concentrice* $A\,B_1\,C\,D_1$, $A_1\,B\,C_1\,D$ *și se duce prin* O *o rază variabilă ce le întâlnește în* P_1 *și* Q_1, *atunci paralelele la axele* $y'\,y$, $x'\,x$ *duse prin* P_1, Q_1 *se întâlnesc într'un punct* P, *al cărui loc geometric este rombul* A B C D, (fig. 40).

163. **Problemă.** *Se cere configurația reprezentată parametric prin ecuațiile:*

$$(82) \qquad \begin{cases} x + y = 2\,a\,cp\,\theta \\ x - y = 2\,a\,sp\,\theta \end{cases} \qquad (a > 0).$$

Prima soluție. Fie sistemul rectangular $x\,O\,y$ la care este raportată configurația (82) și rotim în jurul lui O axele $x'\,x$, $y'\,y$ cu unghiul $\alpha = -45°$. Obținem noile axe X' X, Y' Y (fig. 41).

Intre coordonatele (x, y), (X, Y) ale unui aceluiași punct în raport cu primul și al 2-lea sistem de axe, știm că există anumite formule de transformare, care în cazul nostru devin:

$$\begin{cases} x = \dfrac{X}{\sqrt{2}} + \dfrac{Y}{\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{X}{\sqrt{2}} + \dfrac{Y}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

De aci și din ecuațiile (82) din enunț, obținem

$$(83)\quad \begin{cases} x+y=Y\sqrt{2}=2a\,cp\,\theta=2a\,sp\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ x-y=X\sqrt{2}=2a\,sp\,\theta=2a\,cp\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \end{cases}$$

de unde, notând (84) $\frac{\pi}{2}-\theta=\varphi$, deducem:

$$(85)\quad \begin{cases} X=a\sqrt{2}\,cp\,\varphi \\ Y=a\sqrt{2}\,sp\,\varphi. \end{cases}$$

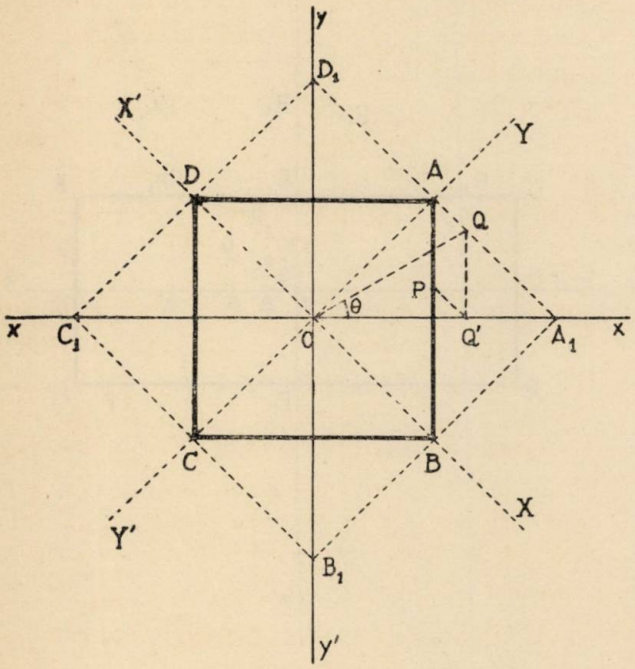


Fig. 41.

Acestea sunt ecuațiile parametrice ale configurației cerute, față de noul sistem de axe X′X, Y′Y.

Este ușor de observat că ecuațiile parametrice (85), sunt analoage ecuațiilor (77) din problema No. 161. Rezultă atunci că și concluziile sunt analoage, astfel că față de noul sistem de axe, putem afirma că:

Configurația cerută este patratul B A D C *de semidiagonală* $OB=a\sqrt{2}$ (fig. 41).

Determinarea lui θ *corespunzător unui punct* P *al patratului și invers.*

Să considerăm un punct P, situat de exemplu pe latura A B. Unghiul polar al lui P față de axa O X, este chiar unghiul φ, cum am arătat în observarea din problema No. 161, adică

$$\sphericalangle XOP=\varphi.$$

Rezultă atunci, în baza relației (84), că unghiul cerut θ, este

$$(86)\quad \theta=\frac{\pi}{2}-\varphi=\sphericalangle POA,$$

unghiu care apoi trebuie măsurat față de axa polară O x.

Dacă punctul P, este situat pe altă latură, pentru care deci $\varphi>\frac{\pi}{2}$, se ia pentru θ valoarea pozitivă

$$(87)\quad \theta=2\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi,$$

ceiace este permis în baza relațiilor (83).

Invers. Relația (86) sau (87) rezolvă și problema inversă, fiindcă dacă ne dăm θ, aflăm pe φ, care determină precis poziția punctului P situat pe conturul patratului.

Soluția a 2ª. Sistemul (82) este evident echivalent cu următorul:

$$(88)\quad \begin{cases} x=a\,(cp\,\theta+sp\,\theta) \\ y=a\,(cp\,\theta-sp\,\theta). \end{cases}$$

Rămâne să găsim configurația reprezentată parametric prin ecuațiile (88).

In adevăr, în virtutea formulelor (4 și (4′) (N-rile 11—12, P. Iª), care au loc când θ variază în anumite cadrane, obținem din (88), următoarele ecuații și inegalități simultane, ce le înscrim în tabloul ce urmează:

θ	Inegalități.	Ecuații.	Observare.
$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$	$-a\leq y\leq a$	$x=a$	Ecuațiile și inegalitățile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$	$-a\leq x\leq a$	$y=-a$	
$\pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$	$-a\leq y\leq a$	$x=-a$	
$\frac{3\pi}{2}\leq\theta\leq 2\pi$	$-a\leq x\leq a$	$y=a$	

Pentru a traduce grafic rezultatele cuprinse în acest tablou, construim perechile de paralele $x=a$, $x=-a$ și $y=a$, $y=-a$, reținând din fiecare numai segmentele A B, C D, A D, B C care satisfac simultan și inegalitățile din tablou. Putem deci afirma că:

Configurația reprezentată parametric de ecuațiile (82), *este patratul* A B C D *cu laturile paralele la axe și egale cu* $2a$ (fig. 41).

164. **Problemă.** *Se cere configurația reprezentată parametric prin ecuațiile*:

$$(89)\qquad \begin{cases} x = a\,(sp\,\theta + cp\,\theta) \\ y = b\,(sp\,\theta - cp\,\theta). \end{cases}$$

Soluție. In virtutea formulelor (4) și (4′) (N-rile 11—12, P. I[a]), care au loc când θ variază în anumite cadrane, obținem din (89) următoarele ecuații și inegalități simultane, ce le înscrim în tabloul ce urmează:

θ	Inegalități.	Ecuații.	Observare.
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$-b \leq y \leq b$	$x = a$	Ecuațiile și inegalitățile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$	$-a \leq x \leq a$	$y = b$	
$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	$-b \leq y \leq b$	$x = -a$	
$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$	$-a \leq x \leq a$	$y = -b$	

Pentru a traduce grafic rezultalele cuprinse în acest tablou, construim perechile de paralele $x = a$, $x = -a$ și $y = b$, $y = -b$ reținând din fiecare numai segmentele A B, D C, B C, A D, care satisfac simultan și inegalitățile din tablou. Putem deci afirma că:

Configurația reprezentată parametric prin ecuațiile (89, *este dreptunghiul* A B C D *cu laturile paralele la axe și respectiv egale cu* $2a$, $2b$.

Determinarea lui θ *corespunzător unui punct* P *al dreptunghiului și invers.*

Construim întâi dreptele auxiliare E F, G H, $E_1 F_1$, $G_1 H_1$, înclinate pe axe de 45°, cum se văd în figură.

Fie acum un punct P, situat de exemplu pe latura A B, de coordonate

$$x = O H_1, \qquad y = H_1 P.$$

Ducem prin P o paralelă la Ox, care întâlnește în Q și P′ pe E F și Oy.

Prin mijlocul Q′ a lui P′ Q ducem o paralelă la Oy și fie R și R′ intersecțiile ei cu E F și Ox. Unim O cu R și afirmăm că,

$$\sphericalangle H_1 O R = \theta.$$

In adevăr, observăm din figură că,

$$y = H_1 P = R' Q' = R' R - Q' R = R' R - Q' Q,$$

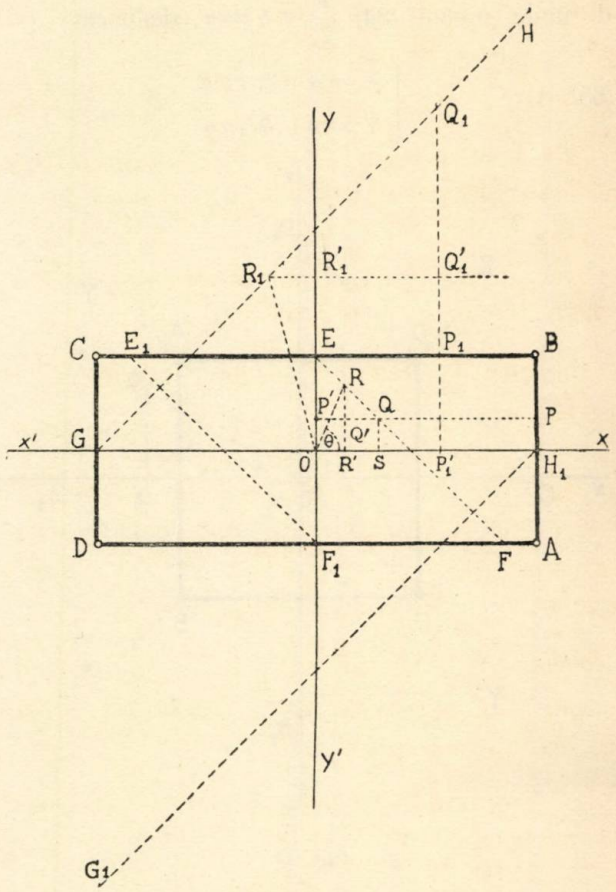


Fig. 42.

sau încă,

$$(90)\qquad y = R' R - O R'.$$

De altă parte, din triunghiul dreptunghic O R′ R, conform *teoremei 1ª* (No. 49, P. II[a]), avem:

$$\begin{cases} R' R = (O R' + R' R)\,sp\,\theta = b\,sp\,\theta \\ O R' = (O R' + R' R)\,cp\,\theta = b\,cp\,\theta. \end{cases}$$

Relația (90) devine astfel

$$y = b\,(sp\,\theta - cp\,\theta).$$

Unghiul θ este astfel bine determinat.

Dacă P se află în P_1 pe latura B C; procedăm analog în felul următor:

Prin P_1 ducem o paralelă la Oy, care întâlneşte în Q_1 şi P_1' pe GH şi Ox.

Prin mijlocul Q_1' a lui $P_1'Q_1$ ducem o paralelă la Ox şi fie R_1, R_1' intersecţia ei cu GH şi Oy. Unim O cu R_1 şi

$$\sphericalangle H_1 O R_1 = \theta,$$

cum uşor se poate arăta.

Dacă P se află pe CD sau DA, se procedează analog, folosindu-se însă respectiv dreptele auxiliare E_1F_1 şi G_1H_1.

Invers. Când se dă θ, punctul P corespunzător dreptunghiului se află astfel. Se duce prin O o dreaptă înclinată pe Ox de unghiul θ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right.$, în cazul figurei), care întâlneşte în R dreapta auxiliară EF. Scoborâm perpendiculara RR' pe Ox, pe care luăm $R'S = OR'$ şi ridicăm în S o perpendiculară pe Ox, care întâlneşte în Q pe EF.

Ducem prin Q o paralelă la Ox şi unde întâlneşte pe AB este punctul căutat P.

Analog procedăm când $\theta > \frac{\pi}{2}$, folosind pe rând celelalte drepte auxiliare, GH, E_1F_1, G_1H_1, cum este uşor de înţeles.

165. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric astfel:*

$$(91) \qquad \begin{cases} x + y = b\sqrt{2}\, sp\, \theta \\ x - y = a\sqrt{2}\, cp\, \theta \end{cases} \qquad (a > b).$$

Soluţie. Fie un sistem rectangular cu axele $x'x$, $y'y$. Alegem ca noui axe bisectoarele $X'X$, $Y'Y$ ale unghiurilor formate de primele axe, (fig. 43).

Dacă (x, y), (X, Y) sunt coordonatele unui aceluiaşi punct în raport cu sistemele de axe xOy şi XOY, atunci între coordonatele lor există relaţiile

$$(92) \qquad \begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

dat fiind că noile axe pot fi privite ca obţinute prin rotaţia de unghiul $\alpha = -45^0$ a celor iniţiale.

De aci şi din ecuaţiile (91) deducem

$$\begin{cases} x + y = Y\sqrt{2} = b\sqrt{2}\, sp\, \theta \\ x - y = X\sqrt{2} = a\sqrt{2}\, cp\, \theta, \end{cases}$$

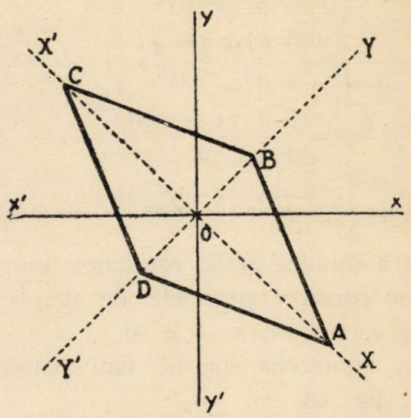


Fig. 43.

deci

$$(93) \qquad \begin{cases} X = a\, cp\, \theta \\ Y = b\, sp\, \theta. \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile parametrice ale configuraţiei cerute, însă faţă de noul sistem de axe $X'X, Y'Y$.

Este uşor de observat că ecuaţiile parametrice (93) sunt identice ecuaţiilor (79) din problema de la No. 162, atunci şi concluziile sunt identice, astfel că faţă de noul sistem de axe, putem afirma că:

Configuraţia cerută este rombul $ABCD$ *de diagonale* $2a$, $2b$.

Observare. Chestiunea determinării lui θ pentru un punct al rombului şi chestiunea inversă a fost soluţionată în problema de la No. 162.

166. **Problemă.** *Se cere configuraţia cu ecuaţiile parametrice:*

$$(94) \qquad \begin{cases} x = a\, cp\, \theta \\ x + y = a\, sp\, \theta. \end{cases}$$

Soluţie. Dacă adunăm şi scădem ecuaţiile (94), conform cu formulele (4) şi (4') (N-rile 11—12, P. I[a]), care au loc când θ este în anumite cadrane, obţinem nişte ecuaţiuni simple, valabile simultan cu inegalităţile ce reiasă din ecuaţiile (94), când θ variază. Putem forma astfel următorul tablou rezumativ:

θ	Inegalităţi.	Ecuaţii.	Observare.
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq x+y \leq a \end{cases}$	$2x+y=a$	Ecuaţiile şi inegalităţile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$	$\begin{cases} -a \leq x \leq 0 \\ 0 \leq x+y \leq a \end{cases}$	$y=a$	
$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	$\begin{cases} -a \leq x \leq 0 \\ -a \leq x+y \leq 0 \end{cases}$	$2x+y=-a$	
$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$	$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ -a \leq x+y \leq 0 \end{cases}$	$y=-a$	

Pentru a traduce grafic rezultatele din acest tablou, vom construi perechile de drepte paralele $2x+y=a$, $2x+y=-a$ şi $y=a$, $y=-a$, care prin intersecţia lor ne dau paralelogramul A B C D, (fig. 44)

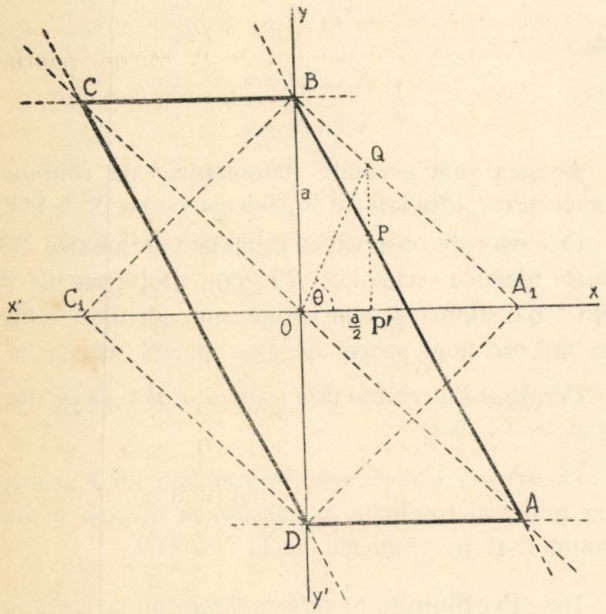


Fig. 44.

Privind ecuaţiile din tablou şi inegalităţile din dreptul lor, care trebuesc simultan satisfăcute, conchidem că numai punctele situate pe segmentele A B, B C, C D, D A convin. Putem deci afirma că:

Configuraţia cu ecuaţiile parametrice (94), *este paralelogramul* A B C D *cu diagonalele situate pe dreptele* $x=0$, $x+y=0$.

Determinarea lui θ *corespunzător unui punct* P *al paralelogramului* A B C D *şi invers.*

Fie P un punct situat, de exemplu pe latura A B, de coordonate

$$x = O P', \qquad y = P' P.$$

Construim patratul auxiliar $A_1 B C_1 D$, de semidiagonală $O A_1 = a$, (fig. 44).

Prelungim P' P până întâlneşte în Q pe $A_1 B$ şi unim Q cu O. Afirmăm că,

$$\sphericalangle A_1 O Q = \theta .$$

In adevăr, în triunghiul dreptunghic O P' Q, teorema 1ª (No. 49, P IIª) ne permite a scri:

$$(95) \quad \begin{cases} x = O P' = (O P' + P' Q)\, cp\, \theta = a\, cp\, \theta \\ P' Q = O P' + P' Q)\, sp\, \theta = a\, sp\, \theta . \end{cases}$$

Dar avem evident

$$P' Q = P' A_1 = O A_1 - O P' = a - x = x + y ,$$

ultima egalitate fiind dedusă din ecuaţia dreptei $2x+y=a$, pe care este situată latura A B. Relaţiile (95) se mai pot scri încă

$$\begin{cases} x = a\, cp\, \theta \\ x+y = a\, sp\, \theta , \end{cases}$$

ceeace invederează că θ a fost bine determinat.

Invers. Dacă ne dăm θ, punctul P corespunzător al paralelogramului se află astfel:

Prin O ducem o rază înclinată pe $O A_1$ de unghiul θ, care întâlneşte pe $A_1 B$ în Q (în cazul nostru). Ducem din Q o perpendiculară pe $O A_1$, care întâlneşte latura A B a paralelogramului în punctul cerut P.

167. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$(96) \quad \begin{cases} D \equiv a x + b y + c = cp\, \theta \\ D_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = sp\, \theta , \end{cases} \qquad (a b_1 - a_1 b \neq 0 .$$

Soluţie. Dacă adunăm şi scădem ecuaţiile (96), conduşi de formulele (4) şi (4') (N-rile 11—12, P. Iª), care au loc când θ este în anumite cadrane, obţinem nişte ecuaţiuni simple, valabile simultan cu inegalităţile ce reiasă din ecuaţiile (96), când θ variază.

Sintetizăm în următorul tablou rezultatele ce le obţinem:

θ	Inegalități.	Ecuații.	Observare.
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} 0 \leq D \leq 1 \\ 0 \leq D_1 \leq 1 \end{cases}$	$D + D_1 = 1$	Ecuațiile și inegalitățile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$	$\begin{cases} -1 \leq D \leq 0 \\ 0 \leq D_1 \leq 1 \end{cases}$	$D_1 - D = 1$	
$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	$\begin{cases} -1 \leq D \leq 0 \\ -1 \leq D_1 \leq 0 \end{cases}$	$D + D_1 = -1$	
$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$	$\begin{cases} 0 \leq D \leq 1 \\ -1 \leq D_1 \leq 0 \end{cases}$	$D_1 - D = -1$	

Pentru a traduce grafic rezultatele cuprinse în acest tablou, vom construi perechile de paralele $D + D_1 = 1$, $D + D_1 = -1$ și $D_1 - D = 1$, $D_1 - D = -1$ (notate pe figură 1, 3, 2, 4), care prin intersecția lor ne dau paralelogramul $A B_1 A_1 B$ (fig 45).

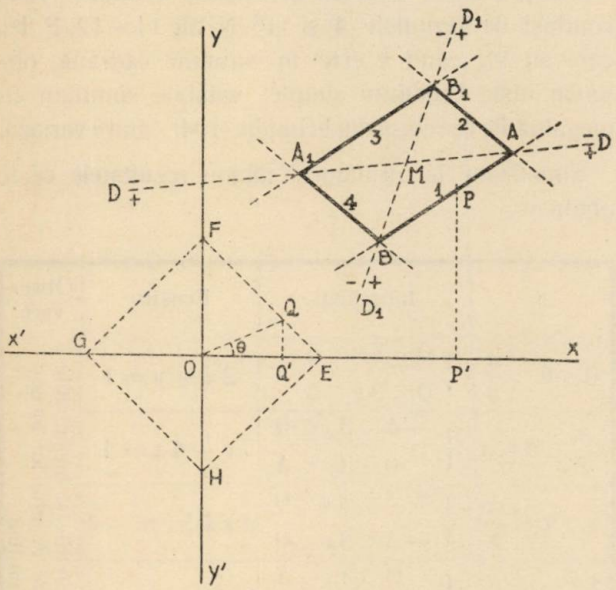


Fig. 45.

Vom demonstra acum că, numai punctele situate pe laturile paralelogramului $A B_1 A_1 B$ satisfac simultan condițiilor din tablou, deci ecuațiilor (96).

In adevăr, vom observa întâi că, vârfurile A, A_1 și B, B_1 se găsesc respectiv pe dreptele $D = 0$, $D_1 = 0$, fiindcă aceste puncte pot fi privite și ca intersecțiile dreptelor următoare:

(97) $A\,(D = 0,\ D_1 = 1)$, $B\,(D_1 = 0,\ D = 1)$
$A_1\,(D = 0,\ D_1 = -1)$, $B_1\,(D_1 = 0,\ D = -1)$,

ecuații compatibile acelora pe care sunt situate laturile paralelogramului.

De altă parte știm că ori ce dreaptă $\Delta = 0$, împarte planul în două regiuni și pentru punctele unei regiuni avem $\Delta > 0$, iar pentru punctele celeilalte regiuni avem $\Delta < 0$.

Așa fiind, observăm că dreptele $D = 0$, $D_1 = 0$, care se intersectează în M (fiindcă $a b_1 - a_1 b \neq 0$), împart planul în regiunile $A M B$, $A M B_1$, $B_1 M A_1$ și $A_1 M B$.

Pentru un punct $P(x, y)$ situat pe segmentul $A B$, avem

(98) $\qquad D + D_1 = 1, \quad D \geq 0, \quad D_1 \geq 0,$

fiindcă punctul P este situat față de $D = 0$, de aceiași parte ca și B pentru care $D = 1$, iar față de $D_1 = 0$ este de aceiași parte ca și A pentru care $D_1 = 1$, cum reiasă din (97). Ceva mai mult, funcțiunea continuă $D \equiv a x + b y + c$, care ia valoarea 0 în A și valoarea 1 în B, rămâne cuprinsă între 0 și 1 ($0 \leq D \leq 1$) când P se mișcă de la A la B. Analog se arată că $0 \leq D_1 \leq 1$. Deci numai punctele P ale segmentului $A B$ satisfac condițiilor din primul rând al tabloului.

Dacă P s'ar afla pe segmentul $A B_1$, am avea

(99) $\qquad D_1 - D = 1, \quad D \leq 0, \quad D_1 \geq 0$

cum este ușor de observat și mai precis $-1 \leq D \leq 0$, $0 \leq D \leq 1$.

Dacă P s'ar afla pe segmentul $B_1 A_1$, am avea

(100) $\qquad D + D_1 = -1, \quad D \leq 0, \quad D_1 \leq 0$

cum observăm iarăși cu ușurință și mai precis $-1 \leq D \leq 0$, $-1 \leq D_1 \leq 0$.

In fine, dacă P s'ar afla pe segmentul $A_1 B$, am avea condițiile din tablou

(101) $\qquad D_1 - D = -1, \quad D \geq 0, \quad D_1 \leq 0$

și mai precis $0 \leq D \leq 1$, $-1 \leq D_1 \leq 0$.

Relațiile (98), (99), (100) și (101) pe care le-am justificat, invederează că numai punctele situate pe segmentele $A B$, $A B_1$, $B_1 A_1$, $A_1 B$ satisfac pe rând condițiilor din tablou, deci ecuațiilor (96).

Putem afirma astfel că: Configurația reprezentată parametric prin ecuațiile (96), este paralelogramul $A B_1 A_1 B$ *cu diagonalele situate pe dreptele* $D = 0$, $D_1 = 0$, (fig. 45).

Determinarea lui θ corespunzător unui punct P al paralelogramului $A B_1 A_1 B$ şi invers.

Fie P un punct situat, de exemplu pe latura A B, de coordonate

$$x = O P', \qquad y = P' P.$$

Construim patratul trigonometric E F G H (O E = 1). Segmentele O P' şi P P' fiind cunoscute, le substituim lui x şi y în ecuaţiile (96) şi avem

$$(102) \quad \begin{cases} \alpha = a \cdot \overline{O P'} + b \cdot \overline{P' P} + c = cp\,\theta \\ \beta = a_1 \cdot \overline{O P'} + b_1 \cdot \overline{P' P} + c_1 = sp\,\theta. \end{cases}$$

Geometria ne învaţă să construim cu uşurinţă segmentele α, β date de relaţiile (102), când cunoaştem segmentele $\overline{O P'}$, $\overline{P' P}$ şi coeficienţii a, b, c, a_1, b_1, c_1.

Segmentele α şi β evident că satisfac condiţiile

$$\begin{matrix} 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \beta \leq 1 \end{matrix}, \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Acum măsurăm pe O E segmentul $O Q' = \alpha$, ridicăm în Q' pe O x o perpendiculară care întâlneşte pe E F în Q şi unim Q cu O.

Obţinem astfel,

$$\sphericalangle E O Q = \theta,$$

corespunzător punctului P.

Invers. Dacă ne dăm θ, punctul P corespunzător paralelogramului se află astfel:

Prin O ducem o rază înclinată pe O x de unghiul θ, care întâlneşte patratul trigonometric (pe E F de exemplu) în Q şi ducem perpendiculara Q Q' pe O x.

Obţinem astfel segmentele

$$\alpha = O Q' = cp\,\theta, \qquad \beta = Q' Q = sp\,\theta.$$

Atunci ecuaţiile (96) ne dau

$$\begin{cases} a x + b y + c = \alpha \\ a_1 x + b_1 y + c_1 = \beta, \end{cases}$$

de unde:

$$(103) \quad \begin{cases} x = \dfrac{b_1 (\alpha - c) - b (\beta - c_1)}{a b_1 - a_1 b} \\ y = \dfrac{a (\beta - c_1) - a_1 (\alpha - c)}{a b_1 - a_1 b}. \end{cases}$$

Segmentele x şi y se pot construi cu uşurinţă în funcţie de segmentele cunoscute α, β şi coeficienţii din (103), prin mijloace simple de geometrie.

Odată ce am construit segmentul x, măsurăm pe O x o lungime $O P' = x$, ridicăm în P' o perpendiculară pe O x şi ea va tăia pe A B (în cazul nostru având $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), tocmai în punctul cerut P.

Observare. Problema tratată aci, cuprinde problemele precedente, particularizând convenabil coeficienţii din ecuaţiile (96).

168. **Problemă.** *Se cere configuraţia care parametric are ecuaţiile:*

$$(104) \quad \begin{cases} D \equiv 3x = \Delta\, cp\,\theta \\ D_1 \equiv 3y = \Delta\, sp\,\theta, \end{cases} \qquad \text{unde: } \Delta = x + 2y + 1.$$

Soluţie. Dacă adunăm şi scădem ecuaţiile (104), conduşi de formulele (4) şi (4') (N-rile 11—12, P. I[a]), care au loc când θ este în anumite cadrane, obţinem nişte ecuaţiuni simple, valabile simultan cu inegalităţile ce reiasă din ecuaţiile (104), când θ variază.

Sintetizăm în următorul tablou rezultatele ce le obţinem:

θ	Inegalităţi.	Ecuaţii.	Observare.
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} 0 \leq 3x \leq \Delta \\ 0 \leq 3y \leq \Delta \end{cases}$	$2x + y = 1$	Ecuaţiile şi inegalităţile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$	$\begin{cases} -\Delta \leq 3x \leq 0 \\ 0 \leq 3y \leq \Delta \end{cases}$	$y - 4x = 1$	
$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	$\begin{cases} -\Delta \leq 3x \leq 0 \\ -\Delta \leq 3y \leq 0 \end{cases}$	$4x + 5y = -1$	
$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$	$\begin{cases} 0 \leq 3x \leq \Delta \\ -\Delta \leq 3y \leq 0 \end{cases}$	$5y - 2x = -1$	

Pentru a traduce grafic rezultatele cuprinse în acest tablou, construim pe rând dreptele $2x + y = 1$, $y - 4x = 1$, $4x + 5y = -1$, $5y - 2x = -1$, (fig. 46), care se intersectează formând patrulaterul $A B A_1 B_1$, dreptele $D = 0$, $D_1 = 0$ fiind diagonale.

Vom demonstra că numai punctele situate pe laturile acestui patrulater satisfac simultan condiţiilor din tablou, deci ecuaţiilor (104).

In acest scop construim încă dreptele auxiliare:

$$(105)\quad \begin{cases} \Delta_1 \equiv 3x - \Delta = 2x - 2y - 1 = 0 \\ \Delta_2 \equiv 3y - \Delta = y - x - 1 = 0 \\ \Delta_3 \equiv 3x + \Delta = 4x + 2y + 1 = 0 \\ \Delta_4 \equiv 3y + \Delta = x + 5y + 1 = 0. \end{cases}$$

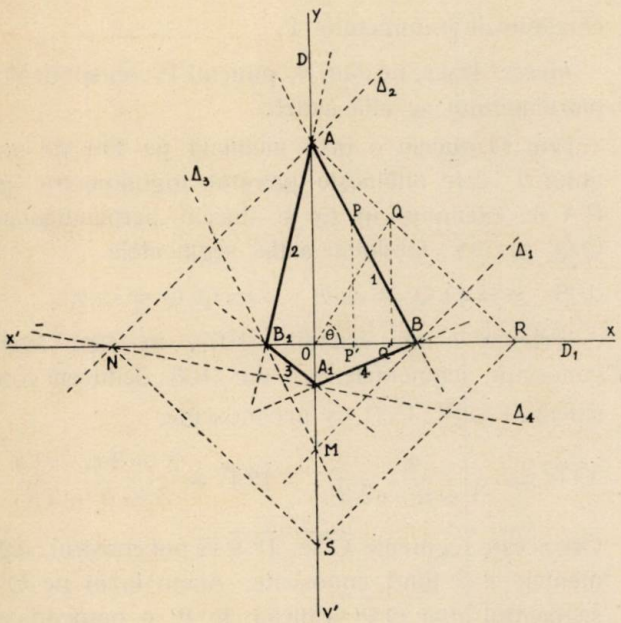


Fig. 46.

Aceste drepte, în figură, sunt respectiv B M, A N, B_1 M, A_1 N.

Observăm apoi că pentru origină avem:

$$(106)\quad \Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 < 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_4 > 0.$$

Cu această pregătire putem acum arăta cu uşurinţă că, numai punctele patrulaterului A B A_1 B_1 satisfac condiţiilor din tablou, adică ecuaţiilor (104).

In adevăr, pentru un punct P (x, y) situat pe A B, avem întâi

$$2x + y = 1, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0,$$

apoi fiindcă P faţă de dreptele $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ este de partea lor în care se află şi origina O, pentru care sunt satisfăcute inegalităţile (106), rezultă că şi pentru coordonatele lui P avem

$$\Delta_1 \leq 0, \qquad \Delta_2 \leq 0$$

(P putând coincide chiar cu A, sau B).

ceeace este tot una a scri

$$3x \leq \Delta, \qquad 3y \leq \Delta,$$

cum reiasă din (105).

Aşa dar pentru un punct P situat pe segmentul A B, avem satisfăcute simultan condiţiile din tablou

$$2x + y = 1 \quad \begin{cases} 0 \leqq 3x \leqq \Delta \\ 0 \leqq 3y \leqq \Delta, \end{cases}$$

pe care nici un alt punct nu le mai satisface. *Rezultă că segmentul* A B *face parte din configuraţia cerută.*

Dacă punctul P (x, y) se află pe segmentul A B_1, avem întâi evident

$$y - 4x = 1, \qquad x \leqq 0, \qquad y \geqq 0,$$

apoi fiindcă P faţă de dreptele $\Delta_3 = 0$, $\Delta_2 = 0$ are aceiaşi aşezare ca şi O, vom avea şi pentru P cum reiasă din (106)

$$\Delta_3 \geqq 0, \qquad \Delta_2 \leqq 0$$

(P putând coincide chiar cu B_1, sau A).

Aceste inegalităţi se mai pot scri

$$-\Delta \leqq 3x, \qquad 3y \leqq \Delta,$$

cum reiasă din (105).

Aşa dar punctele situate pe segmentul A B_1 şi numai ele, satisfac condiţiilor

$$y - 4x = 1, \quad \begin{cases} -\Delta \leq 3x \leq 0 \\ 0 \leq 3y \leq \Delta, \end{cases}$$

de unde *rezultă că, segmentul* A B_1, *face parte din configuraţia cerută.*

Dacă punctul P (x, y) se află pe segmentul B_1 A_1, avem întâi evident

$$4x + 5y = -1, \qquad x \leq 0, \qquad y \leq 0,$$

apoi fiindcă P faţă de dreptele $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$ are aceiaşi aşezare ca şi O, vom avea şi pentru P cum reiasă din (106)

$$\Delta_3 \geq 0, \qquad \Delta_4 \geq 0$$

(P putând coincide chiar cu B_1, sau A_1).

Aceste inegalităţi se mai pot scri

$$-\Delta \leq 3x, \qquad -\Delta \leq 3y,$$

cum reiasă din (105).

Aşa dar punctele situate pe segmentul B_1 A_1 şi numai ele satisfac condiţiilor din tablou

$$4x + 5y = -1, \quad \begin{cases} -\Delta \leq 3x \leq 0 \\ -\Delta \leq 3y \leq 0, \end{cases}$$

de unde *rezultă că, segmentul* B_1A_1 *face parte din configurația cerută.*

Dacă punctul P (x, y) se află pe segmentul A_1B, avem întâi evident

$$5y - 2x = -1, \qquad x \geq 0, \qquad y \leq 0,$$

apoi fiindcă P față de dreptele $\Delta_1 = 0$, $\Delta_4 = 0$ are aceiași așezare ca și O, vom avea și pentru P cum reiasă din (106),

$$\Delta_1 \leq 0, \qquad \Delta_4 \geq 0$$

(P putând coincide chiar cu A_1, sau B).

Aceste inegalități se mai pot scri

$$3x \leq \Delta, \qquad -\Delta \leq 3y,$$

cum reiasă din (105).

Așa dar punctele situate pe segmentul A_1B și numai ele satisfac condițiilor din tablou

$$5y - 2x = -1, \quad \begin{cases} 0 \leq 3x \leq \Delta \\ -\Delta \leq 3y \leq 0, \end{cases}$$

de unde *rezultă că, segmentul* A_1B *face parte din configurația cerută.*

Reunind toate concluziile de mai sus, putem afirma că:

Configurația, care parametric are ecuațiile (104), *este patrulaterul* AB_1A_1B *cu diagonalele situate pe axe,* (fig. 46).

Determinarea lui θ *corespunzător unui punct* P *al patrulaterului* AB_1A_1B *și invers.*

Fie P un punct situat, de exemplu pe latura AB, de coordonate

$$x = OP', \qquad y = P'P.$$

Construim patratul trigonometric RANS ($OR = 1$). Segmentele OP' și $P'P$ fiind cunoscute, le substituim lui x și y în ecuațiile (104) și deducem

$$(107) \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{3 \cdot OP'}{OP' + 2\overline{P'P} + 1} = cp\,\theta \\ \beta = \dfrac{3 \cdot \overline{P'P}}{OP' + 2\overline{P'P} + 1} = sp\,\theta. \end{cases}$$

Segmentele α și β date de aceste relații se pot ușor construi și ele satisfac evident condițiilor

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Acum măsurăm pe OR segmentul $OQ' = \alpha$, ridicăm în Q' o perpendiculară pe Ox (fig. 46), care întâlnește pe RA în Q și unim Q cu O.

Obținem astfel

$$\sphericalangle ROQ = \theta,$$

corespunzător punctului P.

Invers. Dacă ne dăm θ, punctul P corespunzător patrulaterului se află astfel:

Prin O ducem o rază înclinată pe Ox de unghiul θ, care întâlnește patratul trigonometric (pe RA de exemplu) în Q și ducem perpendiculara QQ' pe Ox. Obținem astfel segmentele

$$(108) \quad \alpha = OQ' = cp\,\theta, \qquad \beta = Q'Q = sp\,\theta.$$

Privind acum ecuațiile (107), în care avem cunoscute segmentele α, β din (108) deducem considerând $\overline{OP'}$, $\overline{P'P}$ ca necunoscute,

$$\overline{OP'} = \frac{\alpha}{3 - \alpha - 2\beta}, \qquad \overline{P'P} = \frac{3 - 3\alpha - 2\beta}{3 - \alpha - 2\beta}.$$

Ori, aceste segmente $\overline{OP'}$, $\overline{P'P}$ se pot construi, segmentele α, β fiind cunoscute. Acum luăm pe Ox segmentul aflat OP', ridicăm în P' o perpendiculară pe Ox și unde ea întâlnește patrulaterul AB_1A_1B, este punctul căutat P. (Cazul figurei fiind $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$).

Observare. Mai general s'ar putea cere:

Să se afle configurația reprezentată parametric prin ecuațiile:

$$\begin{cases} D \equiv ax + by + c = \Delta\, cp\,\theta \\ D_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = \Delta\, sp\,\theta, \end{cases} \quad \text{unde: } \Delta = \tau x + \beta y + \gamma.$$

Această problemă necesită însă o discuție mai atentă, dat fiind că putem avea mai multe cazuri de figură, printre care și cazul triunghiului. O vom trata detailat cu altă ocazie.

Configurații curbilinii reprezentate parametric.

169. **Problemă.** *Se cere configurația reprezentată parametric prin ecuațiile*

$$(109) \quad \begin{cases} x^2 = cp\,\theta \\ y = sp\,\theta. \end{cases}$$

Soluție. Observăm întâi că pentru $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $cp\,\theta$ este negativ, astfel că n'am putea obține pentru x valori reale.

Rămâne să ne ocupăm numai de cazurile

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi.$$

Pentru primul din aceste cazuri, adunăm ecuațiile (109) și obținem $y + x^2 = 1$, în baza formulei (4) (No. 11, P. I^a), iar pentru al 2-lea caz, scădem prima din ecuațiile (109) din a 2-a și obținem $y - x^2 = -1$, în baza formulei a 3-a din (4') (No. 12, P. I^a). Dacă ținem seamă și de inegalitățile ce reiasă din (109) când θ variază, putem forma următorul tablou rezumativ:

θ	Inegalități.	Ecuații.	Observare.
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	$y + x^2 = 1$	Ecuațiile și inegalitățile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$	$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$	$y - x^2 = -1$	

Să traducem grafic rezultatele din acest tablou.

Pentru aceasta construim parabolele $y + x^2 = 1$, $y - x^2 = -1$ și reținem din prima numai arcul A B C și din a 2-a reținem numai arcul A D C, pentru a satisface inegalităților simultane din tablou.

Rezultă dar că: *Configurația reprezentată prin ecuațiile parametrice* (109), *este conturul curbiliniu* A B C D, *format din arcele de parabole* A B C *și* A D C (fig 47).

Punctele A și C ale conturului sunt *puncte anguloase*, fiindcă avem câte două tangente în aceste puncte, de coeficienți unghiulari respectivi $y' = \pm 2$.

Determinarea lui θ *corespunzător unui punct* P *al conturului și invers.*

Fie P un punct situat, de exemplu pe arcul A B C, de coordonate

$$x = O\,P', \qquad y = P'\,P.$$

Construim întâi patratul trigonometric A B C D (O A = 1). Ducem din P o paralelă la O x, care întâlnește latura A B în Q și unim Q cu O.

Afirmăm că

$$\sphericalangle\, A\,O\,Q = \theta.$$

In adevăr, în patratul trigonometric, A B C D, prin definiție avem

$$O\,Q' = cp\,\theta, \qquad Q'\,Q = sp\,\theta.$$

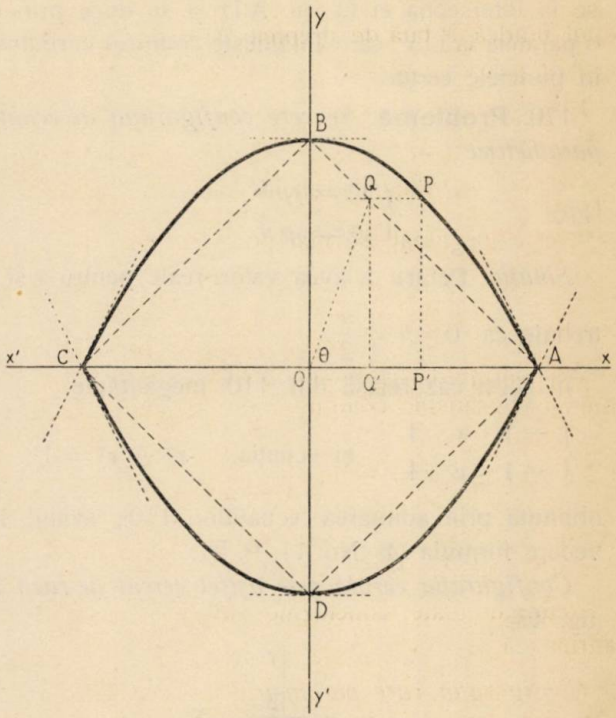


Fig. 47:

De altă parte, din figură și din ecuația $y + x^2 = 1$, pe care se află arcul A B C, avem evident

$$O\,Q' = O\,A - Q'\,A = 1 - y = x^2,$$

astfel că rezultă

$$x^2 = cp\,\theta, \qquad y = sp\,\theta.$$

Unghiul θ este astfel bine determinat.

Analog aflăm pe θ, când P este pe arcul A D C, numai că atunci se ia intersecția Q a paralelei prin P la O x, cu latura A D și $\sphericalangle\, A\,O\,Q = \theta$, unde $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$.

Invers. Dacă ne dăm $\theta\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, punctul P corespunzător conturului se află astfel:

Prin O ducem o rază înclinată pe O x de unghiul θ, care întâlnește latura A B în Q. Ducem prin Q o paralelă la O x și unde ea întâlnește conturul

curbiliniu, avem punctele P şi P_1 căutate (căci la un θ corespund două puncte, cum se vede din prima ecuaţie din (109). Dacă $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, atunci ducând o rază înclinată pe Ox de acest unghiu θ, se ia intersecţia ei Q cu AD şi se duce prin el o paralelă la Ox, care întâlneşte conturul curbiliniu în punctele cerute.

170. **Problemă**. *Se cere configuraţia de ecuaţii parametrice:*

$$(110) \qquad \begin{cases} x^2 = cp\,\theta \\ y^2 = sp\,\theta . \end{cases}$$

Soluţie. Pentru a avea valori reale pentru x şi y trebuie ca $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

In acest caz reiasă din (110) inegalităţile

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$ şi ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$,

obţinută prin adunarea ecuaţiilor (110), având în vedere formula (4) (No. 11, P. I[a]).

Configuraţia cerută este astfel cercul de rază 1, (fig. 48).

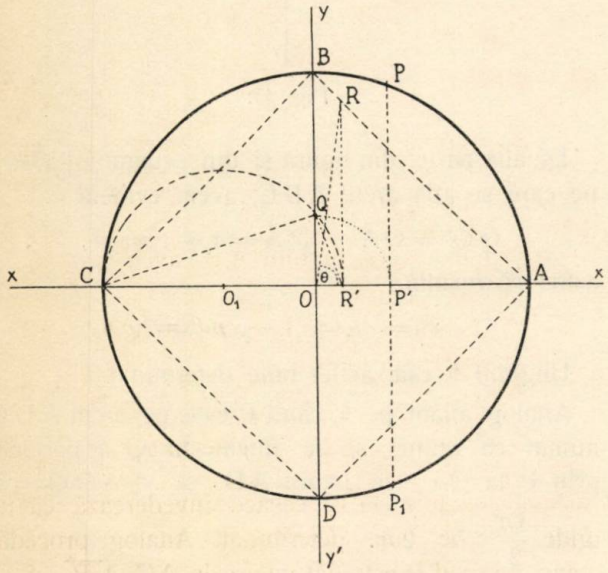


Fig. 48.

Determinarea lui θ corespunzător unui punct P *al cercului şi invers.*

Fie P un punct pe cercul O, de coordonate

$$x = OP', \qquad y = P'P.$$

Construim întâi patratul trigonometric ABCD. Luăm pe Oy segmentul $OQ = OP'$. Unim C cu Q şi în Q pe dreapta CQ, ducem o perpendiculară, care întâlneşte pe Ox în R′. In R′ ridicăm pe Ox o perpendiculară, care întâlneşte latura AB în R. Unim R cu O şi afirmăm că,

$$\sphericalangle AOR = \theta .$$

In adevăr, în patratul trigonometric ABCD, prin definiţie avem

$$(111) \qquad OR' = cp\,\theta , \qquad R'R = sp\,\theta .$$

De altă parte, din triunghiul dreptunghic CQR′ şi din ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$, deducem:

$$\overline{OQ}^2 = 1 \cdot \overline{OR}', \quad \text{deci}$$

$$(112) \qquad \overline{OR}' = \overline{OQ}^2 = \overline{OP'}^2 = x^2, \quad \text{şi}$$

$$R'R = R'A = 1 - OR' = 1 - x^2 = y^2.$$

Din (111) şi (112) rezultă

$$x^2 = cp\,\theta , \qquad y^2 = sp\,\theta .$$

Unghiul θ este astfel bine determinat.

Invers. Dacă ne dăm $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, să vedem cum aflăm punctele P corespunzătoare cercului, căci din (110) se observă că la un θ dat, corespund patru puncte P simetrice câte două faţă de axe. Este suficient prin urmare a afla pe unul din ele.

Pentru aceasta ducem prin O o rază înclinată pe Ox de unghiul θ, care întâlneşte latura AB în R şi din R lăsăm perpendiculara RR′ pe Ox.

Pe CR′ ca diametru descrim un semicerc, care întâlneşte în Q pe Oy. Luăm pe Ox segmentul $OP' = OQ$ şi prin P′ ridicăm pe Ox o perpendiculară, care va întâlni cercul în punctele P, P_1. Simetricele lor faţă de Oy răspund şi ele unghiului θ.

Observare. Din figura (48), se vede că unui punct P al cercului de coordonate (x, y), îi corespunde pe latura AB un punct R de coordonate (x^2, y^2), deci: *Locul punctului* R *când* P *se mişcă pe cerc este latura* AB.

171. **Problemă**. *Se cere configuraţia având ecuaţiile parametrice:*

$$(113) \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} = cp\,\theta \\ y = sp\,\theta . \end{cases}$$

Soluţie. Dacă adunăm şi scădem ecuaţiile (113) conform formulelor (4) şi (4′) (N-rile 11—12, P. I^a), care au loc când θ este în anumite cadrane, obţinem nişte ecuaţiuni simple, valabile simultan cu inegalităţile ce reiasă din (113), când θ variază.

Putem forma astfel următorul tablou rezumativ:

θ	Inegalităţi.	Ecuaţii.	Observare.
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} 1 \leq x \leq \infty \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	$y = 1 - \frac{1}{x}$	Ecuaţiile şi inegalităţile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$	$\begin{cases} -\infty \leq x \leq -1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$	$y = 1 + \frac{1}{x}$	
$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	$\begin{cases} -\infty \leq x \leq -1 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$	$y = -1 - \frac{1}{x}$	
$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$	$\begin{cases} 1 \leq x \leq \infty \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$	$y = -1 + \frac{1}{x}$	

Pentru a traduce grafic rezultatele din acest tablou, procedăm astfel:

Construim pe rând iperbolele ale căror ecuaţii sunt scrise în penultima coloană din tablou şi reţinem din ele numai arcele ce satisfac inegalităţilor din dreptul lor, scrise în tablou.

In felul acesta obţinem următorul răspuns la problemă:

Configuraţia reprezentată prin ecuaţiile parametrice (113), *este conturul curbiliniu* B A C, $B_1 A_1 C_1$ ($O A = O A_1 = 1$) *format din arcele de iperbole* A B, A C *şi* $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, *asimptote respectiv dreptelor* $y = 1$, $y = -1$, (fig. 49).

Punctele A şi A_1 ale configuraţiei, sunt puncte anguloase, fiindcă în aceste puncte avem câte două tangente de coeficienţi unghiulari respectivi, $y' = \pm 1$.

Determinarea lui θ *corespunzător unui punct* P *al configuraţiei şi invers.*

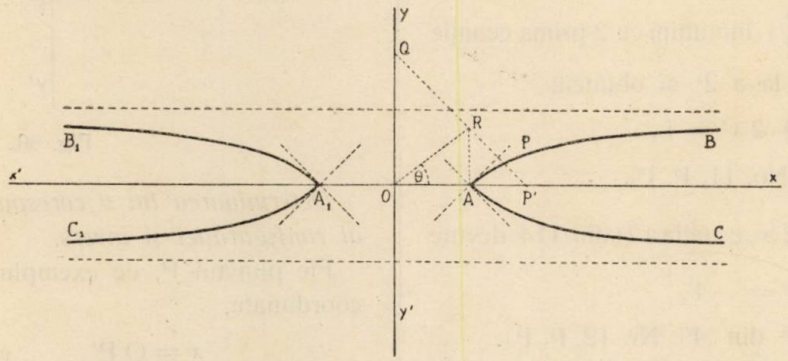


Fig. 49

Fie P un punct situat, de exemplu pe arcul A B, de coordonate

$$x = O P', \qquad y = P' P.$$

Ducem prin P′ perpendiculara P′ Q pe bisectoarea unghiului $x O y'$. Ridicăm în A o perpendiculară pe $O x$, care întâlneşte în R pe P′ Q. Unim O cu R şi afirmăm că,

$$\sphericalangle A O R = \theta.$$

In adevăr, în triunghiul dreptunghic O A R, *teorema I^a* (No. 49, P. II^a), ne permite a scri

$$O A = (O A + A R)\, cp\, \theta = (O A + A P')\, cp\, \theta = x\, cp\, \theta,$$

sau

$$\frac{1}{x} = cp\, \theta.$$

Apoi din ecuaţia arcului A B, avem

$$y = 1 - \frac{1}{x} = 1 - cp\, \theta = sp\, \theta.$$

Astfel,

$$\frac{1}{x} = cp\, \theta, \qquad y = sp\, \theta,$$

tocmai ecuaţiile (113), ceeace invederează că unghiul θ este bine determinat. Analog procedăm când punctul P este dat pe arcele AC, $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, numai că P′ Q se înlocueşte prin perpendicularele duse prin P′ pe bisectoarele unghiurilor axelor în care se află arcele pe care este situat P.

Invers. Dacă ne dăm θ, să vedem cum aflăm punctul P corespunzător configuraţiei.

Pentru aceasta, ducem prin O o dreaptă înclinată

pe Ox de unghiul θ (în cazul figurei este presupus $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) şi fie R intersecţia ei cu perpendiculara dusă prin A pe Ox. Ducem apoi prin R o perpendiculară pe bisectoarea unghiului xOy, care întâlneşte pe Ox în P'.

Ridicăm în P' o perpendiculară pe Ox, care va întâlni arcul A B în punctul cerut P. Analog procedăm când θ este în alte cadrane.

172. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$(114) \qquad \begin{cases} x^2 = cp\,\theta \\ y = sp\,\theta - cp\,\theta . \end{cases}$$

Soluţie. Pentru ca x să fie real, trebuie să avem

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \text{ sau } \frac{3\pi}{2} \leq 0 \leq 2\pi .$$

In cazul $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, înmulţim cu 2 prima ecuaţie din (114), o adunăm la a 2ª şi obţinem

$$y + 2x^2 = 1 ,$$

în baza formulei (4) (No. 11, P. Iª).

In cazul $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, ecuaţia a 2ª din (114) devine

$$y = -1 ,$$

în baza formulei a 3ª din (4′) (Nr. 12, P. Iª).

In ambele cazuri, trebuie să mai ţinem seamă şi de inegalităţile ce reiasă din (114), când θ variază.

Putem rezuma rezultatele în tabloul următor:

θ	Inegalităţi.	Ecuaţii.	Observare.
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$	$y = 1 - 2x^2$	Ecuaţiile şi inegalităţile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$	$-1 \leq x \leq 1$	$y = -1$	

Trebuie să traducem grafic rezultatele din acest tablou.

Pentru aceasta construim întâi parabola $y = 1 - 2x^2$ şi reţinem numai arcul A B C pentru care $-1 \leq x \leq 1$; construim apoi dreapta $y = -1$ şi reţinem numai segmentul A C pentru care $-1 \leq x \leq 1$, (fig. 50).

Putem astfel conchide:

Configuraţia cerută, reprezentată prin ecuaţiile parametrice (114), *este formată din arcul de parabolă* A B C *şi din segmentul de dreaptă* A C.

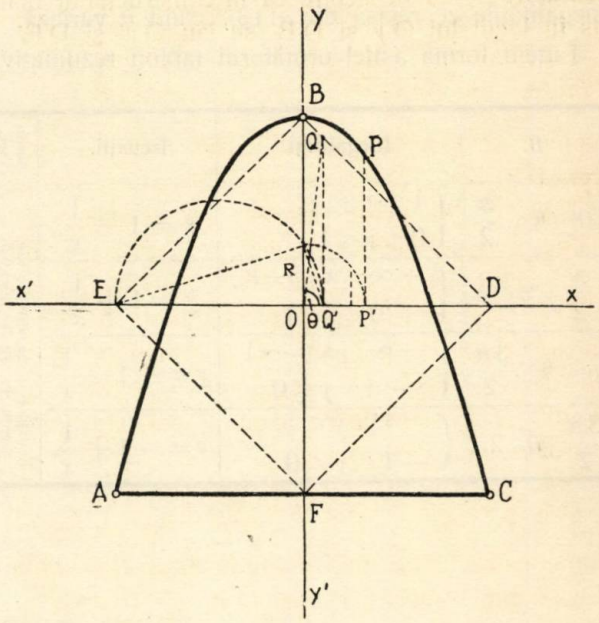


Fig. 50.

Determinarea lui θ corespunzător unui punct P *al configuraţiei şi invers.*

Fie punctul P, de exemplu pe arcul A B C, de coordonate,

$$x = OP', \qquad y = P'P.$$

Construim întâi patratul trigonometric D B E F, ($OD = 1$). Luăm pe Oy segmentul $OR = OP'$, unim R cu E şi ducem în R o perpendiculară pe E R, care taie în Q' pe Ox. Ridicăm în Q' o perpendiculară pe Ox, care întâlneşte latura D B în Q. Unim O cu Q şi afirmăm că,

$$\sphericalangle DOQ = \theta .$$

In adevăr, în triunghiul dreptunghic E R Q', avem:

$$\overline{OR}^2 = \overline{OE} \cdot \overline{OQ'} \quad \text{sau} \quad (115) \quad x^2 = OQ'.$$

De altă parte, prin definiţie

$$(116) \qquad OQ' = cp\,\theta , \qquad Q'Q = sp\,\theta .$$

Din (115), (116) şi din ecuaţia $y = 1 - 2x^2$ a parabolei pe care este situat pe arcul A B C, rezultă

$$x^2 = cp\,\theta , \qquad y = 1 - 2x^2 = 1 - 2\,cp\,\theta = sp\,\theta - cp\,\theta ,$$

tocmai ecuaţiile (114). Unghiul θ este astfel bine determinat.

Analog procedăm în cazul când P este pe segmentul A C, cu deosebire că în construcţia de mai sus în locul lui Oy şi D B, se iau Oy' şi D F.

Invers. Fie $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ducem prin O o dreaptă înclinată pe Ox de unghiul θ, care întâlneşte în Q latura D B. Din Q lăsăm perpendiculară Q Q' pe Ox. Pe E Q' ca diametru descrim un semicerc care întâlneşte în R pe Oy. Luăm pe Ox segmentul $OP' = OR$ şi în P' ridicăm o perpendiculară pe Ox, care va tăia arcul de parabolă A B C, în punctul cerut P. Evident că şi simetricul lui P faţă de Oy răspunde unghiului θ, fiindcă din ecuaţiile (114) se vede că la un θ dat, corespund pentru x două valori egale şi de semne contrare.

Dacă $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, se procedează analog, numai că în construcţia de mai sus, în locul lui D B şi Oy se substitue respectiv D F şi Oy', iar P se ia pe segmentul A C.

Observare. S'ar putea mări şi varia şirul problemelor de acest fel; s'ar putea rezolva şi probleme inverse celor tratate plecând dela anumite configuraţii date şi căutând ecuaţiile parametrice corespunzătoare; s'ar putea propune apoi diferite chestiuni de intersecţii, sau de locuri geometrice. Vom reveni însă mai pe larg asupra acestor chestiuni cu alt prilej, dat fiind că se întrevede de pe acum crearea unui nou domeniu important, pe care l'am putea intitula de pe acum: **Geometria analitică patratică,** ale cărei baze se găsesc în cuprinsul acestei lucrări.

II.

Transformarea patratică transcendentă.

173. *Definiţie.* Fie un punct A de coordonate polare (ϱ, θ), O fiind polul şi Ox axa polară. Luăm pe axa $x'x$ lungimea $OB = OA = \varrho$ (B şi A fiind totdeauna de o aceiaşi parte a axei $y'y$ şi ducem prin B o dreaptă înclinată pe O B de 45°, care va tăia pe O A în A_1 (A_1 între O şi A), (fig. 51).

Punctul A_1 *astfel obţinut, îl numim transformatul patratic al punctului* A, pentru că coordonatele sale carteziene (x, y), se exprimă cu ajutorul *funcţiunilor patratice.*

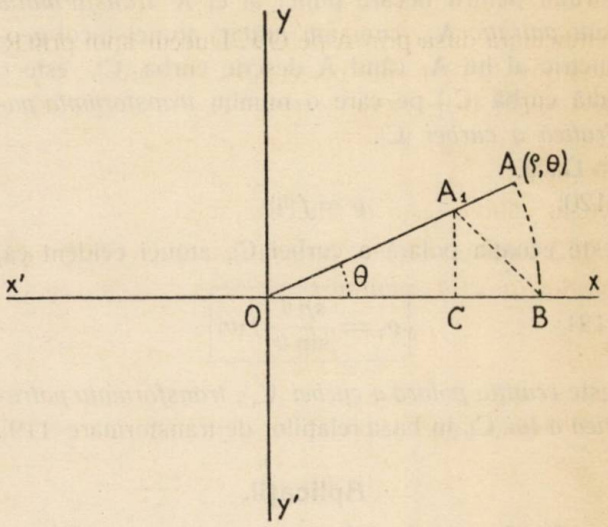


Fig. 51.

Astfel avem

$$(117) \qquad \begin{cases} x = \varrho\, cp\, \theta \\ y = \varrho\, sp\, \theta, \end{cases}$$

cum rezultă din *teorema 1ª* (No. 49, P. II^a) dela triunghiurile dreptunghice, aplicată triunghiului dreptunghic $C O A_1$, observând că $C A_1 = C B$.

Observare. Transformatul patratic al unui punct A de pe axa Ox sau Oy, coincide cu el însuşi.

Relaţiile între coordonatele polare ale punctelor A şi A_1.

174. Observăm întâi că punctele A şi A_1 au acelaşi argument θ. Apoi fiindcă între (x, y) şi (ϱ_1, θ) *coordonatele carteziene* şi *polare* a punctului A_1, avem

$$(118) \qquad \begin{cases} x = \varrho_1 \cos\theta \\ y = \varrho_1 \sin\theta, \end{cases}$$

rezultă din compararea relaţiilor (117) şi (118),

$$\varrho\, cp\, \theta = \varrho_1 \cos\theta$$
$$\varrho\, sp\, \theta = \varrho_1 \sin\theta$$

şi deci:

$$(119) \qquad \boxed{\varrho = \varrho_1 \frac{\sin\theta}{sp\,\theta} = \varrho_1 \frac{\cos\theta}{cp\,\theta}}.$$

Transformata patratică a unei curbe date.

175. Dacă avem o curbă oarecare (C) şi construim pentru fiecare punct al ei A *transformatul său patratic* A_1, cum am arătat, atunci locul geometric al lui A_1 când A descrie curba (C), este o altă curbă (C_1) pe care o numim *transformata patratică a curbei* (C).

Dacă,

(120) $$\varrho = f(\theta)$$

este ecuaţia polară a curbei (C), atunci evident că,

(121) $$\boxed{\varrho_1 = \frac{sp\,\theta}{\sin\theta} f(\theta)}\,.$$

este *ecuaţia polară a curbei* (C_1), *transformata patratică a lui* (C), in baza relaţiilor de transformare (119).

Aplicaţii.

176. *Se cere transformata patratică a dreptei,*

(122) $$y = a\,x.$$

Soluţie. Ecuaţia dată trecută în coordonate polare devine:

(123) $$\theta = \text{arc. tg}\, a = \text{constant.}$$

Fiindcă am arătat că unghiul polar θ al unui punct A este acelaşi cu al *transformatului său patratic* A_1, rezultă din (123) că:

Transformata patratică a dreptei (122) *ce trece prin origină, este tot o dreaptă ce coincide cu ea însăşi.*

177. *Se cere transformata patratică a dreptei:*

(124) $$x + y = a, \qquad (a > 0).$$

Soluţie. Ecuaţia polară a acestei drepte fiind

$$\varrho = \frac{a}{\sin\theta + \cos\theta}\,,$$

ecuaţia polară a transformatei sale patratice, conform formulei (121), este:

(125) $$\boxed{\varrho_1 = \frac{a\,sp\,\theta}{\sin\theta\,(\sin\theta + \cos\theta)}}\,,$$

Să studiem această curbă, construind întâi dreapta (124).

Schimbând θ în $\frac{\pi}{2} - \theta$, ϱ_1 rămâne neschimbat, fiindcă

$$\frac{sp\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]} =$$

$$\frac{cp\,\theta}{\cos\theta\,(\cos\theta + \sin\theta)} = \frac{sp\,\theta}{\sin\theta\,(\sin\theta + \cos\theta)}\,,$$

unde am avut în vedere şi relaţiile (119).

De aci rezultă că, *dreapta pe care este situată bisectoarea unghiului* $x\,O\,y$, *este axă* de simetrie, (fig. 52).

Rămâne să studiem curba numai pentru $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$; dar şi acest interval se poate reduce la

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\,,$$

căci se observă uşor pe figură că, punctele semidreptei C D au unghiul lor polar cuprins în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Astfel, se impun spre cercetare următoarele două cazuri:

1°. *Cazul* $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. In acest caz, θ fiind în primul cadran,

(126) $$sp\,\theta = \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$$

conform primei formule din tabloul (11) (No. 13, P. I[a]).

Ecuaţia (125), în virtutea relaţiei (126) devine

(127) $$\varrho_1 = a\left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^2.$$

Deducem de aci: pentru $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\varrho_1 = \frac{a}{2}$; pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varrho_1 = a$, punctul C fiind transformatul său patratic.

Când θ creşte de la $\frac{\pi}{4}$ la $\frac{\pi}{2}$, ϱ_1 creşte de la $\frac{a}{2}$ la a.

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. In acest caz, θ fiind în al 2[lea] cadran, avem

BIBLIOTECA „ASTRA"

(128) $$sp\,\theta = \frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta},$$

conform formulei a 2ª din tabloul (11) (No. 13, P. I^a).

Ecuaţia (125) în virtutea relaţiei (128) devine

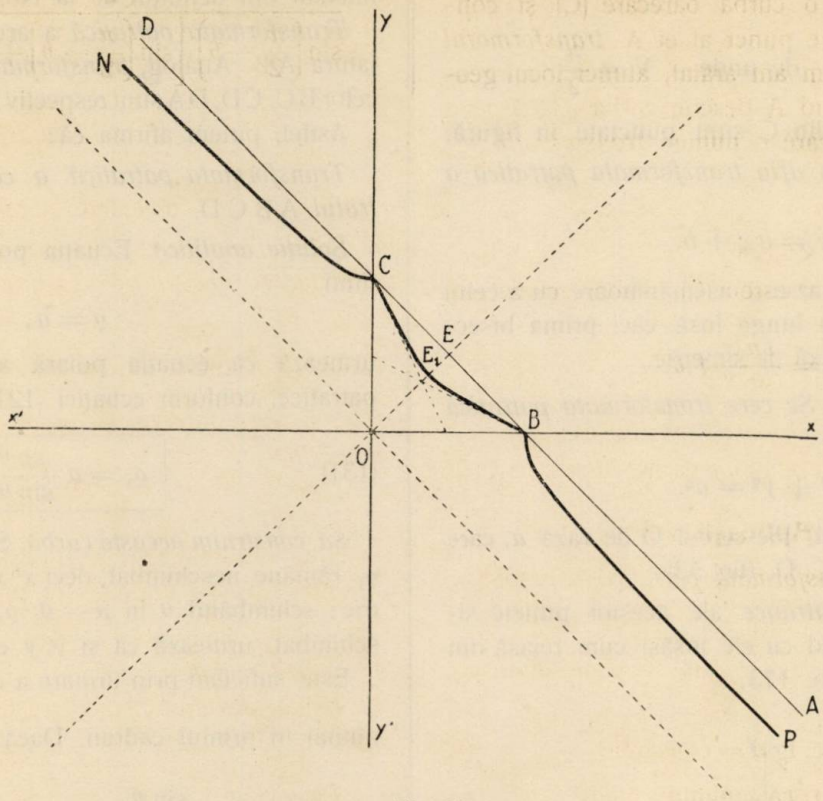


Fig. 52.

(129) $$\varrho_1 = -\frac{a}{\cos 2\theta}.$$

De aci observăm că: pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varrho_1 = a$, apoi când θ creşte până la $\frac{3\pi}{4}$, ϱ_1 creşte până la ∞.

Ţinând seamă că prima bisectoare a axelor este axă de simetrie pentru curba (125) şi reunind rezultatele obţinute în cele două cazuri studiate, putem afirma că:

Transformata patratică a dreptei date, este formată din arcul B E_1 C *şi din arcele* C N, B P *asimptote la a 2ª bisectoare* (fig. 52).

Observări. 1°. Arcul B E_1 C, *transformata patratică a segmentului* B C şi arcele C N, B P *transformatele patratice ale semidreptelor* C D, B A nu se racordează în C şi B, acestea fiind puncte anguloase ale configuraţiei.

Pentru aceasta să calculăm unghiurile tangentelor în C (analog în B) la cele două ramuri, cu raza polara O *y*. Acest unghiu este dat, cum ştim, de formula

$$\operatorname{tg} V = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1'}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

In cazul arcului B E_1 C,

$$\varrho_1 = a\left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^2_{\theta=\frac{\pi}{2}} = a,$$

$$\varrho_1' = 2a\left|\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{(sp^2\theta + cp^2\theta)\sin\theta - sp\,\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2a,$$

deci,

$$\operatorname{tg} V = \frac{1}{2},$$

unghiul θ fiind acum uşor de construit.

In cazul arcului C N,

$$\varrho_1 = -\left|\frac{a}{\cos 2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = a,$$

$$\varrho_1' = -\left|\frac{2a\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

deci,

$$\operatorname{tg} V = 0, \qquad \text{de unde} \qquad V = \frac{\pi}{2}.$$

Aceste tangente din C sunt punctate în figură.

2°. *Analog putem afla transformata patratică a dreptei*

$$y = ax + b.$$

Tratarea acestui caz este asemănătoare cu a celui precedent, ceva mai lungă însă, căci prima bisectoare nu mai este axă de simetrie.

178. **Problemă**. *Se cere tronsformata patratică a cercului:*

(130) $$x^2 + y^2 = a^2.$$

Soluție geometrică. Fie cercul O de rază a, care taie axele în A, B, C, D, (fig. 53).

Transformatele patratice ale acestor puncte situate pe axe, coincid cu ele însăși cum reiasă din observarea de la No. 173.

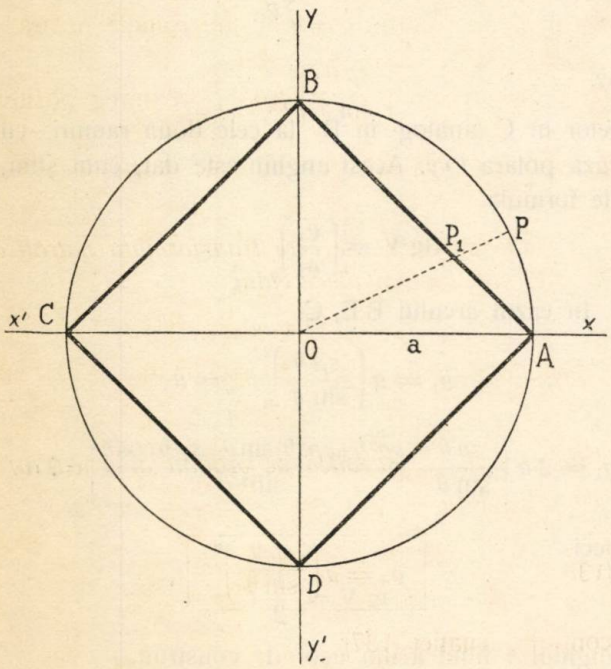


Fig. 53.

Construim întâi patratul A B C D. Dacă considerăm un punct oarecare P, așezat pe arcul A B de exemplu, *transformatul său patratic* P_1, se găsește pe latura A B, la intersecția ei cu O P, cum reiasă imediat din definiția de la No. 173.

Transformata patratică a arcului A B este deci latura A B. Analog, *transformatele patratice* ale arcelor B C, C D, D A sunt respectiv laturile B C, C D, D A.

Astfel, putem afirma că:

Transformata patratică a cercului dat este patratul A B C D.

Soluție analitică. Ecuația polară a cercului dat fiind

$$\varrho = a,$$

urmează că ecuația polară a transformatei sale patratice, conform ecuației (121), este:

(131) $$\boxed{\varrho_1 = a\,\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}}.$$

Să construim această curbă. Schimbând θ în $-\theta$, ϱ_1 rămâne neschimbat, deci $x'x$ este axă de simetrie; schimbând θ în $\pi - \theta$, ϱ_1 rămâne iarăși neschimbat, urmează că și $y'y$ este axă de simetrie.

Este suficient prin urmare a construi curba (131) numai în primul cadran. Dacă $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, avem

$$sp\,\theta = \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\cos(45^0 - \theta)},$$

conform primei formule din tabloul (11) (No. 13, P. I^a). Atunci ecuația (131) devine:

(132) $$\varrho_1 = \frac{a}{\sqrt{2}\cos(45^0 - \theta)}, \qquad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Dar în coordonate polare, ecuația (132) reprezintă o dreaptă având depărtarea ei de origină $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$ și înclinarea lui l față de O x, fiind $\alpha = 45^0$. Această dreaptă este tocmai A B din figură, din care trebuie să reținem numai segmentul A B.

Cum am arătat că, curba (131) este simetrică față de axe, conchidem că:

Transformata patratică a cercului dat, este patratul A B C D, *de semidiagonală* O A = a.

Observare. Este interesant și demn de relevat că ecuația (131), *este ecuația polară a unui patrat.*

179. **Problemă.** *Se cere transformata patratică a unui patrat.*

Soluţie. Fie patratul A B C D de semidiagonală O A = a. Ecuaţia sa polară este

(133) $$\varrho_1 = a\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}$$

cum arătat în No. precedent, ecuaţia (131).

Transformata patratică a curbei (133), *are ecuaţia polară*

(134) $$\varrho_2 = a\left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^2,$$

conform ecuaţiei (121) de la No. 175.

Să construim curba (134). Schimbând θ în $-\theta$, ϱ_2 rămâne neschimbat, deci $x'x$ este axă de simetrie; schimbând θ în $\pi-\theta$, ϱ_2 rămâne iarăşi neschimbat, urmează că şi $y'y$ este axă de simetrie.

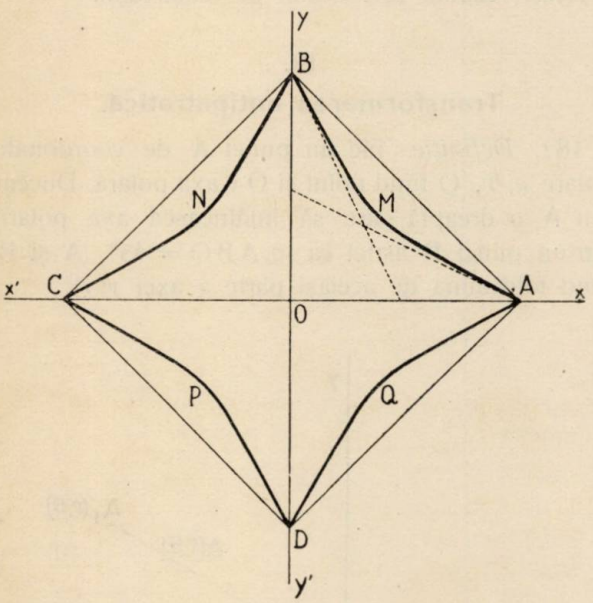


Fig. 54.

Este suficient a construi curba (134) numai în primul cadran.

Observăm că: pentru $\theta = 0$, $\varrho_2 = a$; pentru $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\varrho_2 = \frac{a}{2}$; pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varrho_2 = a$.

In primul cadran, obţinem astfel arcul A M B, *transformata patratică* a laturei A B, analog cu B E, C din figura 52, a problemei No. 177.

Cum am arătat că curba (134) este simetrică faţă de axe, conchidem:

Transformata patratică a patratului A B C D, *este configuraţia curbilinie formată din arcele* A M B, B N C, C P D, D Q A (fig. 54).

Observare. Obţinem grafic configuraţia cerută luând transformatele patratice ale tuturor punctelor patratului.

180. **Generalizare.** *Transformata patratică de ordinul al n-lea a unei curbe.*

Fie,

(135) $$\varrho = f(\theta)$$

ecuaţia polară a unei curbe. *Transformata sa patratică* are ecuaţia polară

(136) $$\varrho_1 = \frac{sp\,\theta}{\sin\theta} f(\theta),$$

conform ecuaţiei (121) (No. 175).

Transformata patratică însă a curbei (136), pe care o numim: *transformata patratică de ordinul al 2-lea a curbei* (135), are ecuaţia polară

$$\boxed{\varrho_2 = \left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^2 f(\theta)},$$

tot conform ecuaţiei (121), cum uşor înţelegem.

In general, *transformata patratică de ordinul al n-lea* al unei curbe $\varrho = f(\theta)$, are ecuaţia polară

(137) $$\boxed{\varrho_n = \left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^n f(\theta)}, \quad (n \text{ întreg pozitiv})$$

la care ajungem aplicând de n ori succesiv ecuaţia (121) (No. 175).

181. **Problemă.** *Se cere transformata patratică de ordinul al n-lea al cercului:*

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Soluţie. Ecuaţia polara a cercului dat, fiind

$$\varrho = a,$$

transformata sa patratică de ordinul al n-lea, are ecuaţia polară

(138) $$\boxed{\varrho_n = a\left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^n},$$

conform ecuaţiei (137).

Să construim curba (138). Schimbând θ în $-\theta$, ϱ_n rămâne neschimbat, deci $x'x$ este axă de simetrie; schimbând θ în $\pi-\theta$, ϱ_n rămâne iarăşi neschimbat, urmează că şi $y'y$ este axă de simetrie.

Este suficient prin urmare a construi curba (138) numai în primul cadran. Observăm că: pentru $\theta = 0$, $\varrho_n = a$; pentru $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\varrho_n = \frac{a}{2^{\frac{n}{2}}}$; pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varrho_n = a$. In primul cadran obţinem astfel arcul $A M_n B$, simetric faţă de prima bisectoare pe care este situat punctul M_n, care tinde să se apropie de O când n creşte.

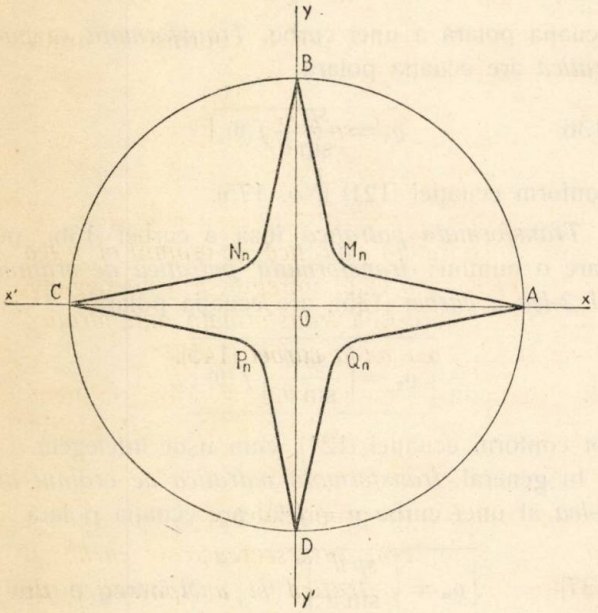


Fig. 55.

Cum am arătat că curba (138) este simetrică faţă de axe, putem afirma că:

Transformata patratică de ordinul al n-lea a patratului A B C D, *este configuraţia curbilinie formată din arcele* $A M_n B$, $B N_n C$, $C P_n D$, $D Q_n A$ (fig. 55).

Observări. 1°. Pentru $n = 1$, avem problema 179, curba corespunzătoare fiind acea din (fig. 54). Pentru $n = 2, 3, 4 \ldots$, arcele respective $A M_2 B$, $A M_3 B, \ldots$ se adâncesc înăuntru unghiurilor axelor.

2°. Se pune acum întrebarea: *Care este configuraţia reprezentată de ecuaţia polară* (138) *pentru* $n = \infty$?

Ne mărginim să vedem ce se întâmplă numai în primul cadran, în celelalte cadrane fiind la fel.

Pentru $\theta = 0$ şi $\theta = \frac{\pi}{2}$, având

$$\frac{sp\,\theta}{\sin\theta} = 1,$$

rezultă că,

$$\lim_{n=\infty} \varrho_n = a.$$

Pentru $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, avem

$$\frac{sp\,\theta}{\sin\theta} < 1,$$

rezultă că,

$$\lim_{n=\infty} \varrho_n = 0,$$

adică un punct oare care al laturei A B, diferit de A şi B, are transformatul său patratic în origină. Conchidem din cele expuse că:

Transformata patratică de ordin infinit a cercului dat, se reduce numai la următoarele cinci puncte: A, B, C, D şi origina O.

Acest rezultat este destul de remarcabil.

III.

Transformarea antipatratică.

182. *Definiţie.* Fie un punct A de coordonate polare (ϱ, θ), O fiind polul şi O x axa polară. Ducem din A o dreaptă care să întâlnească axa polară într'un punct B astfel ca $\sphericalangle A B O = 45°$ (A şi B fiind totdeauna de aceiaşi parte a axei $y' y$):

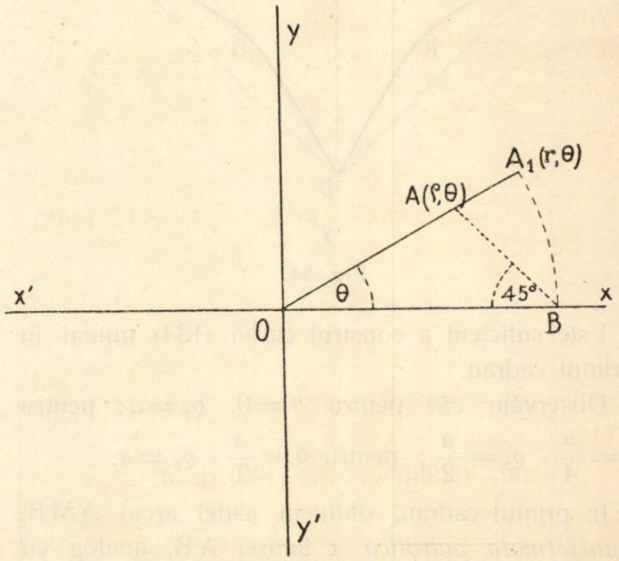


Fig. 56.

Apoi pe dreapta O A prelungită luăm $O A = O B = r_1$.

Punctul A_1 *astfel obţinut, îl numim transforma-*

tul antipatratic al punctului A, (pentru că, invers, transformatul patratic a lui A_1 este A).

Intre coordonatele polare: (ϱ, θ) a punctului A şi (r_1, θ) a punctului A_1, avem relaţia

$$\boxed{\varrho = r_1 \frac{sp\,\theta}{\sin\theta}}, \tag{139}$$

pe care o justificăm astfel. In triunghiul semidreptunghic O B A ($B = 45^0$), unghiul θ fiind ascuţit, *teorema 1ª* (No. 54, P. II^a), ne dă

$$A\,B = r_1 \sqrt{2}\, sp\,\theta. \tag{140}$$

De altă parte, din acelaşi triunghiu O B A, *teorema sinusurilor* ne permite a scri

$$A\,B = \varrho \sqrt{2} \sin\theta. \tag{141}$$

Din relaţiile (140) şi (141) reiasă imediat formula (139).

Această formulă este valabilă în orice cadran ar fi punctul A, ceea ce uşor se poate evidenţia.

Transformata antipatratică a unei curbe.

183. Dacă avem o curbă oarecare (C) şi construim, cum am arătat, pentru fiecare punct al ei A, *transformatul său antipatratic* A_1, atunci locul geometric al lui A_1 când A descrie curba (C), este o altă curbă (C_1) *pe care o numim transformata antipatratică* a curbei (C).

Astfel dacă

$$\varrho = f(\theta) \tag{142}$$

este ecuaţia polară a unei curbe, atunci înlocuind pe ϱ prin valoarea sa din (139), deducem

$$\boxed{r_1 = \frac{\sin\theta}{sp\,\theta} f(\theta)}, \tag{143}$$

ecuaţia polară a transformatei antipatratice a curbei (142).

Mai general, iterând ecuaţia (143) de n ori, obţinem

$$\boxed{r_n = \left(\frac{\sin\theta}{sp\,\theta}\right)^n f(\theta)}, \tag{144}$$

ecuaţia polară a transformatei antipatratice de ordinul al n-lea al curbei $\varrho = f(\theta)$.

Proprietăţi.

184. Având curba

$$\varrho = f(\theta), \tag{145}$$

am arătat că, *transformata sa patratică de ordinul al n-lea şi transformata sa antipatratică de ordinul al n-lea,* au respectiv ecuaţiile polare:

$$\varrho_n = \left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^n f(\theta), \tag{146}$$

$$r_n = \left(\frac{\sin\theta}{sp\,\theta}\right)^n f(\theta). \tag{147}$$

Ambele aceste ecuaţii pot fi cuprinse în următoarea ecuaţie,

$$\boxed{r = \left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^n f(\theta)}. \tag{148}$$

Când întregul n este pozitiv, ecuaţia (148) *reprezintă transformata patratică de ordinul al n-lea a curbei* (145); iar când întregul n este negativ, ecuaţia (148) reprezintă *transformata antipatratică de ordinul al n-lea tot a curbei* (145).

185. Inmulţind ecuaţiile (146) şi (147), obţinem

$$\boxed{\varrho_n \cdot r_n = \varrho^2}. \tag{149}$$

Putem deci enunţa proprietatea:

Orice rază polară, intersectează o curbă şi transformatele ei patratice şi antipatratice de ordinul al n-lea, în trei puncte astfel că, raza polară mijlocie este medie proporţională între celelalte două raze polare.

Caz particular. Pentru cercul $\varrho = a$, relaţia (149) devine,

$$\boxed{\varrho_n \cdot r_n = a^2}, \tag{150}$$

ceiace exprimă proprietatea:

Transformata patratică şi antipatratică de ordinul al n-lea a cercului $\varrho = a$, *sunt curbe inverse în raport cu origina.*

186. **Teoremă.** *Dacă avem două curbe inverse în raport cu origina, atunci transformata patratică de ordinul al n-lea a primei şi transformata antipatratică de ordinul al n-lea a celei de a 2ª, sunt şi ele curbe inverse în raport cu origina.*

Demonstraţie. Fie,

$$\varrho = k f(\theta) \quad \text{şi} \quad r = \frac{k}{f(\theta)} \tag{151}$$

ecuațiile polare a două curbe inverse în raport cu origina.

Atunci, după cele ce știm,

$$(152)\quad \varrho_n = k\left(\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\right)^n f(\theta), \qquad r_n = \left(\frac{\sin\theta}{sp\,\theta}\right)^n \frac{k}{f(\theta)},$$

sunt respectiv *ecuațiile polare a transformatelor patratice și antipatratice de ordinul al n-lea ale primelor două curbe.*

Inmulțind ecuațiile (152), obținem

$$(153)\qquad \varrho_n \cdot r_n = k^2$$

și teorema este astfel demonstrată.

Consecință. Cercul $\varrho = a$, fiind inversul lui însuși față de origină, rezultă conform relației (153)

$$\varrho_n \cdot r_n = a^2,$$

identică cu relația (150). Avem deci același enunț, ca acel dedus din relația (150).

187. **Problemă.** *Se cere transformata antipatratică a cercului:*

$$\varrho = a.$$

Prima soluție. Conform formului (143), *transformata antipatratică* a cercului dat, are ecuația polară

$$(154)\qquad \boxed{r_1 = a\,\frac{\sin\theta}{sp\,\theta}}.$$

Să construim această curbă. Schimbând θ în $-\theta$, r_1 rămâne neschimbat, deci $x'x$ este axă de simetrie; schimbând θ în $\pi - \theta$, r_1 rămâne iarăși neschimbat, urmează că și $y'y$ este axă de simetrie.

Este suficient a construi curba (154) numai în primul cadran.

Dacă $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, avem

$$sp\,\theta = \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\cos(\theta - 45^0)},$$

conform primei formule din tabloul (11) (No. 13, P. I^a).

Atunci ecuația (154) devine:

$$(155)\qquad r_1 = a\sqrt{2}\cos(\theta - 45^0).$$

Dar în coordonate polare, ecuația (155) reprezintă un cerc ce trece prin origină, de rază $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, din care trebuie să reținem evident numai semicercul A M B.

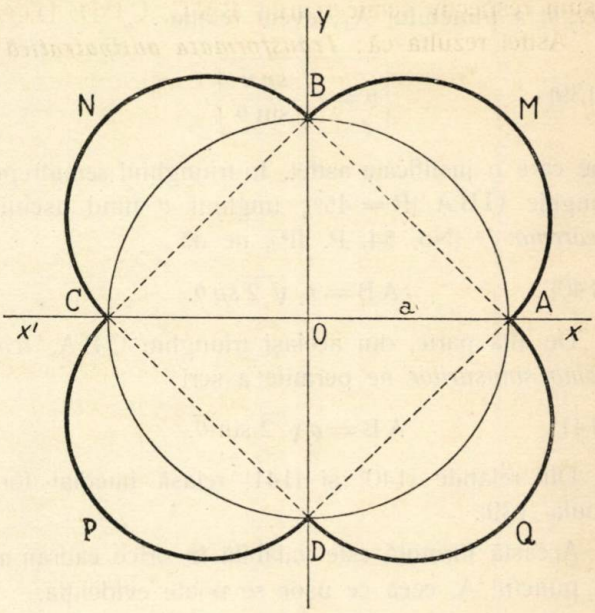


Fig. 57.

Cum am arătat că, curba (154) este simetrică față de axe, conchidem:

Transformata antipatratică a cercului dat, este configurația curbilinie formată din semicercurile A M B, B N C, C P D și D Q A, (fig. 57).

Soluția 2^a. Am arătat la No. 185 că, *transformata patratică și antipatratică de ordinul al n-lea* a cercului $\varrho = a$, sunt curbe inverse în raport cu origina.

In cazul $n = 1$, evident că proprietatea exprimată prin relația (150), se menține și avem

$$(156)\qquad \varrho_1 \cdot r_1 = a^2.$$

Cum *transformata patratică* a cercului $\varrho = a$, este patratul A B C D, în virtutea problemei de la No. 178, urmează că, inversa patratului A B C D în raport cu origina, este *transformata antipatratică* a cercului $\varrho = a$, care se cere în problemă.

Rămâne deci să construim inversa patratului A B C D în raport cu origina O.

Dar inversa dreptei pe care se găsește latura A B este, cum știm, un cerc ce trece prin origină și care va trece și prin punctele A și B, inversele lor însăși, cum reiasă din (156).

Inversa laturei A B, evident că este numai semicercul A M B.

Analog găsim că inversele laturilor B C, C D, D A sunt respectiv semicercurile B N C, C P D, D Q A.

Astfel rezultă că: *Transformata antipatratică a cercului dat, este configurația curbilinie formată din semicercurile* A M B, B N C, C P D, D Q A.

IV.

Coordonate patratice.

188. Putem defini poziția unui punct din plan, cu ajutorul unui nou *sistem de coordonate*, pe care l'am numit „*sistem de coordonate patratic*", fiind în legătură cu *funcțiunile patratice* studiate.

In adevăr, fie sistemul rectangular format din axele $x'x$, $y'y$ cu origina în O și fie A un punct oarecare.

Ducem prin A o dreaptă care să întâlnească axa Ox în B, așa fel ca $\sphericalangle OBA = 45^0$, punctele A și B fiind totdeauna de aceiași parte a axei $y'y$.

Notăm,

$$OB = \varrho, \qquad \sphericalangle xOA = \theta, \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

θ fiind unghiul de care trebuie rotită semiaxa Ox, în sensul pozitiv obicinuit, ca să se suprapună pe semiaxa O A. (Se poate adăoga lui θ totdeauna un multiplu de 2π).

Segmentul pozitiv ϱ și unghiul θ astfel definite, le numim coordonatele patratice ale punctului A.

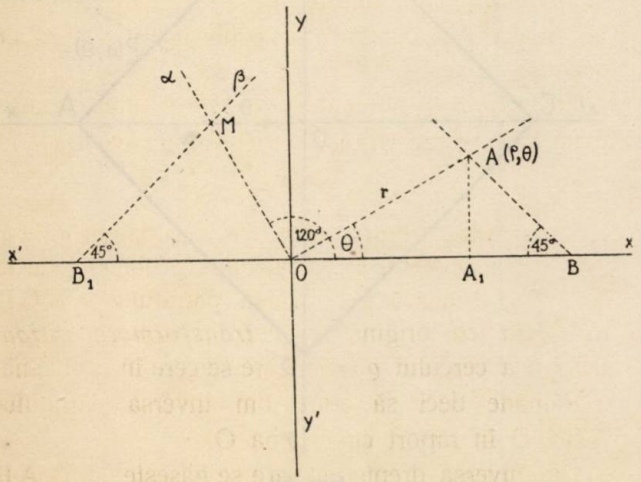


Fig. 58.

Unui punct A, îi corespunde în felul acesta un sistem unic de *coordonate patratice* (ϱ, θ).

Invers, unui sistem de *coordonate patratice* (ϱ, θ), unde ϱ este totdeauna pozitiv, îi corespunde un singur punct A.

Astfel punctul $M(2,120^0)$ în *sistemul patratic,* se obține în felul următor:

Ducem semidreapta $O\alpha$, astfel ca $\sphericalangle xO\alpha = 120^0$. Fiindcă $O\alpha$ este în cadranul al 2-lea, măsurăm pe Ox' segmentul $OB_1 = 2$ și ducem prin B_1 de partea lui $O\alpha$ o semidreaptă $B_1\beta$, astfel înclinată pe Ox', ca $\sphericalangle OB_1\beta = 45^0$. Intersecția M a lui $B_1\beta$ cu $O\alpha$ este punctul căutat, (fig. 58).

La fel procedăm pentru aflarea oricărui punct de *coordonate patratice* (ϱ, θ). Relevăm faptul că, dacă semidreapta $O\alpha$, care face cu Ox unghiul θ, cade în cadranul I, sau IV, segmentul dat ϱ se se măsoară pe Ox, iar dacă $O\alpha$ este în cadranele II, sau III, segmentul ϱ se măsoară pe Ox'.

Relații între coordonatele carteziene și patratice.

189. Fie (x, y) și (ϱ, θ) respectiv, *coordonatele carteziene* și *patratice* ale unui aceluiași punct A. In figura 58, se vede că aceste coordonate sunt:

$$x = OA_1, \quad y = A_1A; \quad \varrho = OB, \quad \theta = \sphericalangle xOA.$$

In triunghiul dreptunghic OA_1A, conform *teoremei* I^a (No. 49, P. II^a), avem:

$$OA_1 = (OA_1 + A_1A)\,cp\,\theta = (OA_1 + A_1B)\,cp\,\theta$$

$$A_1A = (OA_1 + A_1A)\,sp\,\theta = (OA_1 + A_1B)\,sp\,\theta,$$

sau:

$$(157) \qquad \boxed{\begin{array}{l} x = \varrho\, cp\,\theta \\ y = \varrho\, sp\,\theta \end{array}}.$$

Acestea sunt formulele cerute. Formulele (157) sunt generale, fiindcă se mențin oricare ar fi punctul A în diferitele cadrane, cum se poate arăta cu ușurință.

Relații între coordonatele polare și patratice.

190. Fie (r, θ) și (ϱ, θ) respectiv *coordonatele polare* și *patratice* ale unui aceluiași punct A. Se observă întâi că unghiul polar θ este același și în *sistemul polar* și în cel *patratic.*

Apoi în figura 58 se vede că,

$$r = OA, \qquad \varrho = OB.$$

In triunghiul semidreptunghic O B A ($B = 45^0$), în care θ este ascuțit, *teorema I*^{a} (No. 54, P. II^a), ne permite a scri:

(158) $$A B = \varrho \sqrt{2}\, sp\, \theta.$$

De altă parte, în același triunghiu O B A, *teorema sinusurilor*, ne dă:

(159) $$A B = r \sqrt{2} \sin \theta.$$

Din relațiile (158) și (159), deducem

(160) $$\boxed{r = \varrho \frac{sp\, \theta}{\sin \theta}}.$$

Avem astfel relația căutată între *coordonatele polare* și *patratice*. Ea este generală, fiindcă se menține oricare ar fi punctul A în diferitele cadrane, cum se poate arăta cu ușurință.

Curbe în coordonate patratice.

191. Dacă,

(161) $$F(x, y) = 0$$

este ecuația unei curbe în *coordonate carteziene*, atunci ecuația în *coordonate patratice* ale aceleiași curbe, este

(162) $$\boxed{F(\varrho\, cp\, \theta,\quad \varrho\, sp\, \theta) = 0},$$

în virtutea formulelor de transformare (157).

192. Dacă,

(163) $$\varphi(r, \theta) = 0$$

este ecuația unei curbe în *coordonate polare*, atunci ecuația în *coordonate patratice* ale aceleiași curbe, este

(164) $$\boxed{\varphi\left(\varrho \frac{sp\, \theta}{\sin \theta}, \theta\right) = 0},$$

în virtutea formulei de transformare (160).

Aplicații.

193. Dacă,

(165) $$y = m x + n$$

este ecuația unei drepte în *coordonate carteziene*, atunci ecuația sa în *coordonate patratice* este

(166) $$\varrho = \frac{n}{sp\, \theta - m\, cp\, \theta},$$

în baza formulelor (157).

Invers, se trece de la ecuația (166) la ecuația (165).

Caz particular. Dacă $m = 0$, ecuația (166) devine

(167) $$\varrho = \frac{n}{sp\, \theta}.$$

In *coordonate patratice* ecuația (167) reprezintă o dreaptă paralelă la axa $x' x$ dusă la distanța n.

Analog, ecuația în *coordonate patratice*

(168) $$\varrho = \frac{b}{cp\, \theta},$$

reprezintă o paralelă la axa $y' y$ dusă la distanța b.

Se poate arăta direct că, ecuațiile patratice (167) și (168) sunt drepte paralele cu axele, fără a le mai transpune în coordonate carteziene.

194. **Problemă.** *Se cere configurația care în coordonate patratice are ecuația:*

(169) $$\varrho = a, \qquad (a > o).$$

Soluție. Considerăm sistemul rectangular format de axele $x' x$, $y' y$ cu origina în O.

Un punct oarecare P, care satisface ecuația (169), evident că are *coordonatele patratice* (a, θ). Punctul P (a, θ) se poate construi cu ușurință, în baza celor arătate la No. 188, în felul următor, (fig. 59).

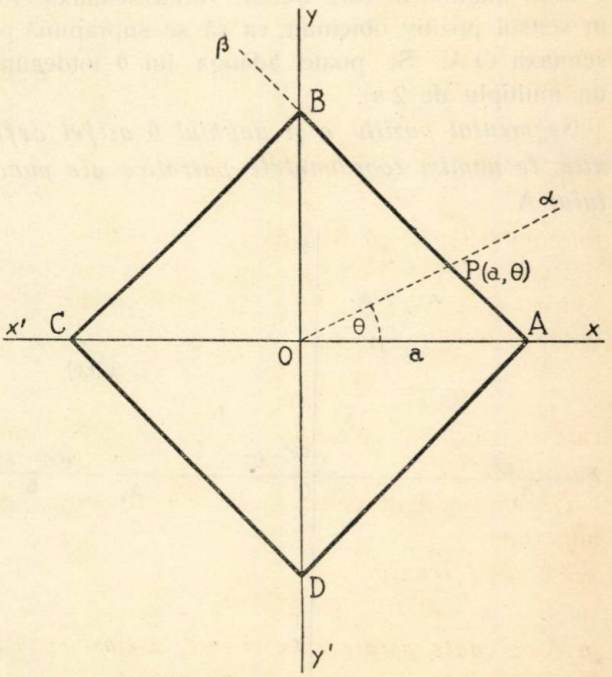


Fig. 59.

Ducem o dreaptă $O\alpha$ oarecare, în primul cadran de exemplu şi fie $\sphericalangle xO\alpha = \theta$.

Măsurăm pe Ox segmentul $OA = a$, ducem prin A dreapta $A\beta$ de partea în care este $O\alpha$, astfel ca $\sphericalangle OA\beta = 45^0$ şi fie B intersecţiei ei cu Oy. Punctul P de intersecţie a lui $O\alpha$ şi $A\beta$ are *coordonatele patrarice* (a, θ).

Dar orice punct P al segmentului AB, evident că are *coordonatele patratice* (a, θ), când $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Segmentul AB face parte din configuraţia cerută.

Dacă $O\alpha$ este în cadranul al 2lea, atunci se măsoară pe Ox' segmentul $OC = a$ şi punctul P de intersecţie între $O\alpha$ şi CB are *coordonatele patratice* (a, θ). Variând θ $\left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right)$, CB rămâne invariabilă, astfel că toate punctele de pe BC satisfac ecuaţia (169).

Analog arătăm că segmentele CD şi DA, (D fiind simetricul lui B faţă de O), fac parte din configuraţia cerută.

Putem conchide acum, că:

Configuraţia, care în coordonate patratice are ecuaţia (169), *este patratul* ABCD, *de semidiagonală* $OA = a$, (fig. 59).

O verificare directă. Am arătat că patratul ABCD din figura 59, are ecuaţia polară

$$r = a\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}, \tag{170}$$

formula (131) de la No. 178.

Dacă trecem *ecuaţia polară* (170), în *coordonate patratice*, folosind formula de transformare (160), obţinem imediat

$$\boxed{\varrho = a},$$

care este ecuaţia patratului ABCD în *coordonate patratice.*

Observare. Este demn de relevat următorul fapt important.

Pe când ecuaţia

$$\varrho = a$$

în coordonate polare este un cerc, aceiaşi ecuaţie în coordonate patratice este un patrat.

195. **Problemă.** *Se cere configuraţia care în coordonate patratice are ecuaţia:*

$$\varrho = a\sqrt{2}\,cp\,\theta, \tag{171}$$

Soluţie. Luăm sistemul rectangular format din axele $x'x$, $y'y$ cu origina în O.

Din ecuaţia (171), observăm că, pentru ca ϱ să fie pozitiv, trebuie să avem:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{sau} \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi.$$

Dar configuraţia (171) este simetrică faţă de Ox în baza relaţiei

$$cp\,(2\pi - \theta) = cp\,\theta,$$

astfel că este suficient a o construi numai în primul cadran şi o întregi în urmă cu simetrica ei faţă de Ox.

Pentru aceasta, să transpunem ecuaţia (171) în *coordonate carteziene.*

Intâi observăm că ecuaţia (171) se mai poate scri

$$\varrho^2 = a\sqrt{2}\,\varrho\,cp\,\theta = a\sqrt{2}\,x, \tag{172}$$

unde am folosit prima din formulele de transformare (157).

Apoi, fiindcă $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, rezultă din aceleaşi formule (157),

$$x + y = \varrho,$$

în baza relaţiei (4) (No. 11, P. Ia).

Ecuaţia (172) acum devine

$$(x + y)^2 = a\sqrt{2}\,x. \tag{173}$$

Rămâne să construim această parabolă, care trece evident prin origină şi prin punctul $A(a\sqrt{2}, 0)$, din care vom reţine numai arcul cuprins în primul cadran, (fig. 60).

Cum $x + y = 0$, ne dă direcţia axei parabolei (173), rotim axele $x'x$, $y'y$ de unghiul $\alpha = -45^0$ şi obţinem noile axe X'X, Y'Y, bisectoarele unghiurilor axelor date.

Formulele cunoscute de transformare, când rotim sistemul iniţial de unghiu α, în cazul nostru sunt:

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}, \quad y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}. \tag{174}$$

In baza acestor formule, ecuaţia (173) devine:

$$2Y^2 = a(X + Y), \tag{175}$$

(X, Y) referindu-se la noul sistem de axe X'X, Y'Y.

Mai departe, facem o translaţie a axelor X'X, Y'Y, astfel ca noua origină $B(\alpha, \beta)$ să fie vârful parabolei (175).

Formulele de transformare în acest caz sunt

$$X = \alpha + X_1, \qquad Y = \beta + Y_1,$$

în baza cărora ecuaţia (175) devine:

(176) $$2(\beta + Y_1)^2 = a(\alpha + \beta + X_1 + Y_1).$$

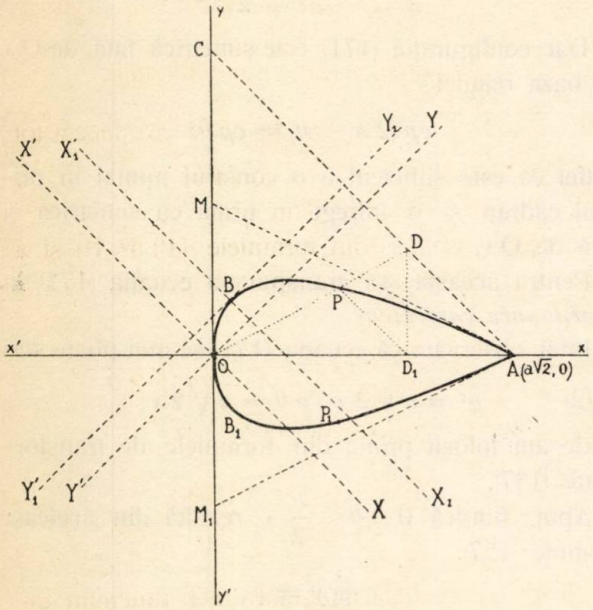


Fig. 60.

Pentru ca B (α, β) să fie vârful parabolei (176), anulăm coeficientul lui Y_1 şi termenul liber, ceace ne dă:

$$\begin{cases} 4\beta - a = 0 \\ 2\beta^2 = a(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem obţinem

$$\alpha = -\frac{a}{8}, \qquad \beta = \frac{a}{4}$$

şi în virtutea acestor valori, ecuaţia (176) devine:

(177) $$2Y_1^2 = aX_1.$$

Fixăm întâi vârful B $\left(-\frac{a}{8}, \frac{a}{4}\right)$ faţă de axele X'X, Y'Y şi prin B ducem dreptele BX_1, BY_1, paralele respectiv la X'X, Y'Y.

Ecuaţia (177) raportată la noul sistem de axe X_1BY_1, reprezintă o parabolă cu vârful în B, cu axa BX_1 şi mai ştim că această parabolă trece încă prin punctele A şi O.

Pentru a trasa mai precis parabola, să construim şi tangentele în A şi O. Ne întoarcem la sistemul iniţial de axe $x'x$, $y'y$ faţă de care punctele A şi O au coordonatele $(a\sqrt{2}, 0)$, $(0, 0)$, iar parabola căutată are ecuaţia (173).

Derivând în raport cu x, ecuaţia implicită (173), găsim:

$$y' = \frac{a\sqrt{2} - 2(x + y)}{2(x + y)}.$$

De aci deducem

$$y'_A = -\frac{1}{2}, \qquad y'_0 = 0,$$

ceeace înseamnă că tangenta în A trece prin punctul M de pe Oy, astfel ca $OM = \frac{OA}{2}$, iar tangenta în O este Oy.

Cu aceste date, putem uşor construi parabola (177), din care trebue să reţinem numai arcul A B O, din primul cadran x O y.

Intregind arcul A B O, cu simetricul său AB_1O faţă de Ox, obţinem complect configuraţia cerută.

Putem deci conchide că:

Configuraţia, care în coordonate patratice are ecuaţia (171), *este conturul curbiliniu format din arcele* A B O *şi* AB_1O.

Se observă că A este un punct angulos al configuraţiei (171), întrucât în A avem două tangente diferite, de coeficienţi unghiulari respectivi, $y' = \mp\frac{1}{2}$.

196. **Construcţia grafică.** Putem obţine foarte simplu. grafic, configuraţia din figura 60, în felul următor.

Pe axele rectangulare Ox, Oy luăm segmentele $OA = OC = a\sqrt{2}$. (O A o putem avea ca ipotenuza unui triunghiu dreptunghic de catete egale cu a).

Ducem segmentul de dreaptă A C şi dintr'un punct oarecare D a lui A C, lăsăm perpendiculara DD_1 pe Ox. Din D_1 ducem o paralelă la A C şi unde ea întâlneşte dreapta O D, obţinem un punct P al configuraţiei cerute.

In adevăr, din triunghiul dreptunghic OD_1D, în virtutea *teoremei 1ª* (No. 49, P. II^a), avem

$$OD_1 = (OD_1 + D_1D)\,cp\,\theta = (OD_1 + D_1A)\,cp\,\theta,$$

sau

$$OD_1 = a\sqrt{2}\,cp\,\theta,$$

unde $\theta = \sphericalangle\, x\,O\,D$.

Punctul P astfel obţinut, în baza celor cuprinse în No. 188, are *coordonatele patratice*

$$\varrho = O D_1 = a\sqrt{2}\, cp\, \theta, \qquad \theta = \sphericalangle\, x O P,$$

care satisfac ecuaţia (171).

Fiecărui punct D situat pe A C, îi corespunde, prin construcţia simplă de mai sus, un punct P. Locul geometric al lui P, când D variază pe segmentul A C, este arcul A P O, care întregit cu simetricul său $A P_1 O$ faţă de $O x$, ne dă configuraţia a cărei *ecuaţie patratică* este (171).

Observare. Multe alte chestiuni asemănătoare se pot propune şi rezolva.

V.

Integrarea funcţiunilor patratice.

197. Vom arăta că, *funcţiunile patratice* de care ne-am ocupat, pot crea încă noui domenii interesante de *„Analiză matematică"*, dintre care noi ne vom ocupa aci numai de unul singur, acela al *„Integrării funcţiilor patratice"*.

Vom expune întâi *metoda generală* pentru *calcularea integralelor definite a funcţiilor raţionale* $R(sp\, x, cp\, x)$ şi apoi vom da *metode directe* pentru diferite cazuri particulare. O parte din aceste rezultate le-am publicat într'o altă lucrare [1].

Metoda generală.

198. *Să se efectueze integrala definită*

$$(178) \qquad I = \int_a^b R(sp\, x, cp\, x)\, d x,$$

unde $R(sp\, x, cp\, x)$ *este o funcţiune raţională de* $sp\, x$, $cp\, x$.

Soluţie. Vom considera numai următoarele două cazuri:

1°. *Cazul* $0 \leq a, b \leq \frac{\pi}{2}$. Facem substituţia

$$sp\, x = t$$

şi ţinând seamă de formula (4 (P. I^a) şi de prima formulă de derivare din tabloul (58) (P. I^a), deducem

$$cp\, x = 1 - t, \qquad x = \text{arc}\, sp\, t,$$

deci:

$$d x = \frac{d t}{1 - 2t + 2t^2}.$$

Integrala (178) devine astfel

$$I = \int_{sp\, a}^{sp\, b} \frac{R(t, 1-t)}{1 - 2t + 2t^2}\, d t,$$

care este integrala unei funcţiuni raţionale.

2°. *Cazul* $\frac{\pi}{2} \leq a, b \leq \pi$. In acest caz facem tot substituţia

$$sp\, x = t,$$

dar conform primei din formulele (4') (P. I^a) şi a formulei a 2^a de derivare din tabloul (58) (P. I^a), deducem

$$cp\, x = t - 1, \qquad d x = \frac{-d t}{1 - 2t + 2t^2},$$

astfel că integrala (178) devine:

$$I = -\int_{sp\, a}^{sp\, b} \frac{R(t, t-1)}{1 - 2t + 2t^2}\, d t,$$

care este de asemeni integrala unei funcţiuni raţionale.

Observare. Analog pentru celelalte cadrane.

In particular, dacă $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq b \leq \pi$, atunci dividem intervalul (a, b) în intervalele $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\left(\frac{\pi}{2}, b\right)$ şi procedăm analog ca în cazurile 1° şi 2°. Integrala (178) se poate efectua oricare ar fi de altfel intervalul (a, b).

Metode directe.

In afară de *metoda generală* expusă, putem folosi pentru integrarea *funcţiunilor patratice* şi unele metode directe, interesante, ceeace vom invedera prin problemele ce urmează.

199. **Problemă.** *Să se efectueze integralele definite*:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\, x\, d x, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} cp\, x\, d x.$$

Soluţie. Considerăm relaţiile cunoscute (12) şi (13) (No. 15, P. I^a)

[1]) *V. Alaci. L'intégration des fonctions quadratiques.* (Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, T. 8; Fasc. 3-4).

$$sp\,x = \frac{1 - \operatorname{tg}(45^0 - x)}{2}, \qquad cp\,x = \frac{1 + \operatorname{tg}(45^0 + x)}{2},$$

valabile pentru $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Multiplicând cu dx aceste relații și integrând de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{tg}(45^0 - x)}{2}\,dx =$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - [\lg \cos(45^0 - x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cp\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}(45^0 - x)}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă astfel:

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cp\,x\,dx = \frac{\pi}{4}}.$$

Observare. De altfel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} s\,p\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sp\,x)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

200. **Problemă.** *Să se efectueze integralele definite.*

$$\int_0^{\pi} cp\,x\,dx, \qquad \int_0^{\pi} cp\,x\,dx.$$

Soluție. Observăm că

$$\int_0^{\pi} sp\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp\,x\,dx,$$

$$\int_0^{\pi} cp\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cp\,x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cp\,x\,dx.$$

Ultimele integrale din membrul al 2-lea, prin substituția

$$x = \frac{\pi}{2} + t$$

devin respectiv:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cp\,t\,dt = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cp\,x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,t\,dt = -\frac{\pi}{4},$$

astfel că obținem:

$$\boxed{\int_0^{\pi} sp\,x\,dx = \frac{\pi}{2}}, \qquad \boxed{\int_0^{\pi} cp\,x\,dx = 0}.$$

201. **Problemă.** *Să se efectueze integralele definite:*

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sp\,x}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cp\,x}.$$

Soluție. In baza formulelor din tabloul (11) (No. 13, P. I[a]) valabile în primul cadran, avem:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sp\,x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\,dx = (x)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$(\lg \sin x)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \lg \sqrt{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cp\,x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4} -$$

$$(\lg \cos x)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \lg \sqrt{2}.$$

Astfel rezultă:

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sp\,x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cp\,x} = \frac{\pi}{4} + \lg \sqrt{2}}.$$

202. **Problemă.** *Se cere valoarea integralelor definite:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sp\,x}{a\,sp\,x + b\,cp\,x}\,dx,$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cp\,x}{a\,sp\,x + b\,cp\,x}\,dx.$$

Soluţie. Observăm că,

$$a\,I + b\,J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

De altă parte avem evident:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x}\,dx =$$

$$[\lg(a\sin x + b\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \lg\frac{a}{b}.$$

Dacă împărţim termenii fracţiei din primul membru prin $(\sin x + \cos x)$ şi ţinem seamă de primele două formule din tabloul (11) (No. 13, P. I[a]), valabile pentru $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, obţinem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\,cp\,x - b\,sp\,x}{a\,sp\,x + b\,cp\,x}\,dx = \lg\frac{a}{b},$$

sau

$$a\,J - b\,I = \lg\frac{a}{b}.$$

Acum din egalităţile stabilite

$$\begin{cases} a\,I + b\,J = \dfrac{\pi}{2} \\ a\,J - b\,I = \lg\dfrac{a}{b}, \end{cases}$$

deducem cu uşurinţă:

$$\boxed{I = \frac{a\pi - 2b\lg\frac{a}{b}}{2(a^2+b^2)}}, \qquad \boxed{J = \frac{b\pi + 2a\lg\frac{a}{b}}{2(a^2+b^2)}},$$

203. **Problemă.** *Se cere valoarea integralei definite:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,cp\,x\,dx.$$

Soluţie. Formula de derivare (46) (No. 25, P. I-a), valabilă pentru $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, anume

$$(sp\,x)' = sp^2 x + cp^2 x = 1 - 2\,sp\,x\,cp\,x,$$

integrată în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, devine:

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,cp\,x\,dx = \frac{1}{2}(x - sp\,x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}.$$

204. **Problemă.** *Să se efectueze integrala definită:*

$$\int_0^{\pi} sp\,x\,cp\,x\,dx.$$

Soluţie. Putem scri:

$$\int_0^{\pi} sp\,x\,cp\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp\,x\,cp\,x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp\,x\,cp\,x\,dx.$$

Prin substituţia

$$x = \frac{\pi}{2} + t,$$

ultima integrală devine

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sp\,x\,cp\,x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} cp\,t\,sp\,t\,dt = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2},$$

astfel rezultă:

$$\boxed{\int_0^{\pi} sp\,x\,cp\,x\,dx = 0}.$$

205. **Problemă.** *Să se efectueze integralele definite:*

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^m x\,dx, \qquad J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cp^m x\,dx.$$

Soluţie. Vom arăta întâi că:

(179) $$\boxed{I_m = J_m}.$$

In adevăr, putem scri încă

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^m\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$$

şi efectuând substituţia

$$\frac{\pi}{2} - x = t,$$

obţinem,

$$J_m = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sp^m t\,dt = I_m,$$

tocmai relaţia (179).

Rămâne a efectua numai integrala I_m. Vom stabili întâi unele formule de recurență pentru I_m și apoi o vom calcula complect.

Pentru aceasta derivăm funcțiunea $sp^{m-1}x$, considerând $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ și avem:

$$(sp^{m-1}x)' = (m-1)\,sp^{m-2}x\,(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x).$$

Integrând în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem următoarea formulă de recurență:

$$(180)\quad \boxed{I_m - I_{m-1} = \frac{1}{2(m-1)} - \frac{1}{2} I_{m-2}}.$$

Cazuri particulare. Observăm direct că,

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}, \qquad \boxed{I_1 = \frac{\pi}{4}},$$

iar din formula (180) deducem încă:

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{2}}, \qquad \boxed{I_3 = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}}.$$

Alte formule de recurență pentru Integrala I_m.

1°. In virtutea formulei de recurență (180), avem succesiv:

$$I_m - I_{m-1} = \frac{1}{2(m-1)} - \frac{1}{2} I_{m-2}$$

$$I_{m-1} - I_{m-2} = \frac{1}{2(m-2)} - \frac{1}{2} I_{m-3}$$

$$I_{m-2} - I_{m-3} = \frac{1}{2(m-3)} - \frac{1}{2} I_{m-4}.$$

Dacă adunăm primelor două relații pe a 3-a multiplicată cu $\frac{1}{2}$, obținem formula remarcabilă de recurență:

$$(181)\quad \boxed{I_m = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \frac{1}{2(m-3)}\right] - \frac{1}{4} I_{m-4}}.$$

2°. Presupunând $m \geqq 4p$, în baza formulei (181), avem încă:

$$I_m = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \frac{1}{2(m-3)}\right] - \frac{1}{4} I_{m-4}$$

$$I_{m-4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-5} + \frac{1}{m-6} + \frac{1}{2(m-7)}\right] - \frac{1}{4} I_{m-8}$$

. . . . . .

$$I_{m-4(p-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-4p+3} + \frac{1}{m-4p+2} + \frac{1}{2(m-4p+1)}\right] - \frac{1}{4} I_{m-4p}$$

Dacă multiplicăm aceste relații respectiv cu șirul numerilor

$$1, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{p-1}}{4^{p-1}}, \ldots$$

și le adunăm, obținem:

$$I_m = \left[\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \frac{1}{2(m-3)}\right] - \frac{1}{2^3}\left[\frac{1}{m-5} + \frac{1}{m-6} + \frac{1}{2(m-7)}\right] + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p-1}}\left[\frac{1}{m-4p+3} + \frac{1}{m-4p+2} + \frac{1}{2(m-4p+1)}\right] - \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}} I_{m-4p}.$$

Avem astfel formula remarcabilă de recurență:

$$(182)\quad \boxed{I_m = A_m - \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}} I_{m-4}},$$

unde:

$$(183)\quad \boxed{A_m = \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}\left[\frac{1}{m-4k+3} + \frac{1}{m-4k+2} + \frac{1}{2(m-4k+2)}\right]}.$$

Calculul complect al integralei I_m.
(m întreg pozitiv).

Fiindcă m faţă de 4 are una din formele (184) $m=4p$, $m=4p+1$, $m=4p+2$, $m=4p+3$, formula de recurenţă (182) devine:

$$(185)\quad I_{4p+k}=A_{4p+k}-\frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}}I_k,\quad (k=0,1,2,3).$$

Dar fiindcă am găsit mai înainte

$$I_0=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\frac{\pi}{4},\quad I_2=\frac{1}{2},\quad I_3=\frac{3}{4}-\frac{\pi}{8},$$

formula (185) se transformă în următoarele formule explicite,

$$(186)\quad \boxed{I_{4p}=A_{4p}-\frac{(-1)^{p-1}\pi}{2^{2p+1}}},$$

$$\boxed{I_{4p+1}=A_{4p+1}-\frac{(-1)^{p-1}\pi}{2^{2p+2}}},$$

$$\boxed{I_{4p+2}=A_{4p+2}-\frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p+1}}},$$

$$\boxed{I_{4p+3}=A_{4p+3}-\frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}}\left(\frac{3}{4}-\frac{\pi}{8}\right)},$$

în care A_{4p}, A_{4p+1}, A_{4p+2}, A_{4p+3}, se calculează cu ajutorul formulei (183).

Formulele remarcabile (186) ne dau explicit valoarea integralei I_m, pentru m întreg pozitiv.

Cazuri particulare. 1°. Pentru $p=1$, rezultă din (184) $m=4,5,6,7$ şi formula (183) dă pe rând:

$$A_4=\frac{2}{3},\quad A_5=\frac{5}{12},\quad A_6=\frac{37}{120},\quad A_7=\frac{59}{240}.$$

Formulele (186), în acest caz, devin respectiv:

$$\boxed{I_4=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}},\quad \boxed{I_5=\frac{5}{12}-\frac{\pi}{16}},\quad \boxed{I_6=\frac{11}{60}},$$

$$\boxed{I_7=\frac{7}{120}+\frac{\pi}{32}}.$$

2°. Pentru $p=2$, rezultă din (184) $m=8,9,10,11$ şi formula (183) dă pe rând:

$$A_8=\frac{4}{105},\quad A_9=\frac{1}{14},\quad A_{10}=\frac{773}{10080},\quad A_{11}=\frac{217}{2880}.$$

In acest caz formulele (186) devin respectiv:

$$\boxed{I_8=\frac{4}{105}+\frac{\pi}{32}},\quad \boxed{I_9=\frac{1}{14}+\frac{\pi}{64}},\quad \boxed{I_{10}=\frac{34}{315}},$$

$$\boxed{I_{11}=\frac{11}{90}-\frac{\pi}{120}}.$$

Consecinţi importante. 1°. Intre integralele J_m şi I_m de mai sus există relaţia

$$(187)\quad \boxed{J_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k I_k},$$

care este justificată de egalitatea evidentă:

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-sp\,x)^m\,dx.$$

2. Cum $J_m=I_m$, formula (187) dă următoarele identităţi:

$$(188)\quad \boxed{\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k I_k=0,\ \text{pentru } m \text{ par}},$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k I_k=2I_m,\ \text{pentru } m \text{ impar}}.$$

206. **Problemă.** *Să se efectueze integrala definită:*

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^m x\,cp^m x\,dx.$$

Soluţie. Vom considera următoarele două cazuri:

1°. *Cazul m, n întregi pozitivi.* Observăm că putem scri

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^m x\,(1-sp\,x)^n\,dx,$$

de unde urmează:

$$\boxed{I_{m,n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k I_{m+k}}.$$

Cu această formulă putem efectua integrala $I_{m,n}$, fiindcă integralele I_{m+k} ne sunt cunoscute din relaţiile (186).

Cazuri particulare. Pentru $m = n = 1$ şi $m = n = 2$ formula (189) ne dă respectiv:

$$I_{1,1} = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

$$I_{2,2} = I_2 - 2I_3 + I_4 = \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3},$$

deci:

$$\boxed{I_{1,1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}, \qquad \boxed{I_{2,2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}}.$$

2°. *Cazul m, n pozitivi.* Vom stabili în acest caz o formulă de recurentă. Pentru aceasta pornim de la integrala definită

$$(190)\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^{m-1}x\, cp^{n-1}x\,(1 - 2\,sp\,x\,cp\,x)\,dx = I_{m-1,\,n-1} - 2\,I_{m,n},$$

şi fiindcă $cp\,x = 1 - sp\,x$, mai putem scri:

$$(191)\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sp^{m-1}x\, cp^{n-1}x\,(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2 x)\,dx.$$

Dacă efectuăm schimbarea de variabilă

$$sp\,x = t, \quad \text{de unde} \quad x = \text{arc}\,sp\,t,$$

deci:

$$dx = \frac{dt}{1 - 2t + 2t^2},$$

în virtutea primei formule din tabloul (58) (No. 43, P. I[a]), integrala (191) devine

$$(192)\quad I = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt = B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

care este cunoscuta integrală a lui *Euler* de *prima speţă*.

Din egalităţile (190) şi (192) deducem următoarea remarcabilă formulă de recurenţă:

$$(193)\quad \boxed{I_{m,n} = \frac{1}{2}\left[I_{m-1,\,n-1} - B(m,n)\right]}.$$

3°. *Cazul* $n = m$. Formula de recurenţă (193), pentru $n = m = 1$, $n = m = 2, \ldots$, $n = m$, ne dă succesiv, observând că $I_{0,0} = \frac{\pi}{2}$:

$$2\,I_{1,1} = \frac{\pi}{2} - B(1,1)$$

$$2\,I_{2,2} = I_{1,1} - B(2,2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\,I_{m,n} = I_{m-1,\,n-1} - B(m,n).$$

Multiplicând aceste relaţiuni respectiv cu numerile $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{m-1}$, adunându-le şi simplificând, obţinem următoarea *formulă interesantă:*

$$(194)\quad \boxed{2\,I_{m,m} = \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{m} 2^{i-1} B(i,i)}.$$

Cazuri particulare. Pentru $m = 3$,

$$I_{3,3} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\right),$$

deci:

$$\boxed{I_{3,3} = \frac{\pi}{16} - \frac{11}{60}}.$$

207. **Problemă.** *Se cere valoarea integralelor definite:*

$$I_m = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{sp^m x}, \qquad J_m = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cp^m x},$$

m întreg pozitiv.

Soluţie. Să arătăm întâi că:

$$(195)\quad \boxed{I_m = J_m}.$$

In adevăr, observăm că putem scri încă

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{sp^m\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

şi efectuând substituţia

$$\frac{\pi}{2} - x = t,$$

obţinem

$$J_m = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{sp^m t} = I_m,$$

tocmai relaţia (95).

Vom efectua dar numai integrala I_m.

Pentru aceasta plecăm de la relaţia de diferenţiare

$$d\frac{1}{sp^{m-1}x}=-\frac{(m-1)\,sp^{m-2}x\,(1-2\,sp\,x+2\,sp^2x)}{sp^{m-2}\,x}dx,$$

valabilă pentru primul cadran. Integrând în intervalul $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$, obţinem:

$$\left(\frac{1}{sp^{m-1}x}\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-(m-1)\,(I_m-2\,I_{m-1}+2\,I_{m-2}).$$

De aci deducem următoarea formulă de recurenţă

$$(196)\qquad \boxed{I_m=2\,(I_{m-1}-I_{m-2})+\frac{2^{m-1}-1}{m-1}},$$

care permite calcularea integralei I_m (m întreg pozitiv), fiindcă cunoaştem

$$I_0=\frac{\pi}{4},\qquad I_1=\frac{\pi}{4}+\lg\sqrt{2},$$

(din problema dela No. 201).

Cazuri particulare. Pentru $m=2, 3, 4, 5$ obţinem respectiv din formula (196):

$$\boxed{I_2=1+\lg 2},\qquad \boxed{I_3=\frac{7}{2}+\lg 2-\frac{\pi}{2}},$$

$$\boxed{I_4=\frac{22}{3}-\pi},\qquad \boxed{I_5=\frac{137}{12}-\pi-2\lg 2}.$$

208. **Problemă.** *Să se efectueze integrala definită:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\,sp^2x\,dx.$$

Soluţie. Observăm că derivata funcţiunii $e^{2x}\,sp\,x$, când $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, este:

$$(e^{2x}\,sp\,x)'=2\,e^{2x}\,sp\,x+e^{2x}\,(1-2\,sp\,x+2\,sp^2x)=e^{2x}+2\,e^{2x}\,sp^2x.$$

Integrând între $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obţinem:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\,sp^2x\,dx=(e^{2x}\,sp\,x)_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}},$$

deci:

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\,sp^2x\,dx=\frac{1+e^{\pi}}{4}}.$$

209. **Problemă.** *Să se efectueze integralele mixte:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{sp\,\frac{x}{2}}dx,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{cp\,\frac{x}{2}}dx.$$

Soluţie. Folosim formulele (2) şi (3) (No. 77. P. III), valabile pentru $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, anume:

$$\frac{\sin x}{sp\,\frac{x}{2}}=1+\sin x+\cos x,$$

$$\frac{\sin x}{cp\,\frac{x}{2}}=1+\sin x-\cos x.$$

Integrând între $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obţinem:

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{sp\,\frac{x}{2}}dx=2+\frac{\pi}{2}},\qquad \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{cp\,\frac{x}{2}}dx=\frac{\pi}{2}}.$$

210. **Problemă.** *Să se efectueze integralele mixte:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{sp\,\frac{x}{2}}\right)^2dx,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{sp\,\frac{x}{2}}\right)^2dx,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{cp\,x}dx.$$

Soluţie. Din formulele (5) şi (4) (No. 77, P. III[a]),

$$\left(\frac{\sin x}{sp\,\frac{x}{2}}\right)^2=2\,(1+\sin x)\,(1+\cos x),$$

$$\left(\frac{\sin x}{cp\,\frac{x}{2}}\right)^2=2\,(1+\sin x)\,(1-\cos x),$$

$$\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{cp\,x}=\frac{1}{2}\,(1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x).$$

Integrând primele două egalităţi între $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi a 3-a între $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, obţinem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{sp\,\frac{x}{2}}\right)^2 dx = 5 + \pi, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{cp\,\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \pi - 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{cp\,x}\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1 - \lg 2}{2}.$$

211. **Problemă.** *Să se efectueze integrala mixtă:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sp^2\theta\, cp^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta.$$

Soluție. Folosim următoarea metodă indirectă:

Pentru aceasta ne referim la arcul de parabolă O B P A din figura 60, corespunzătoare problemei de la No. 195.

Am văzut că acest arc, în *coordonate patratice* satisface la ecuația

$$\varrho = a\sqrt{2}\, cp\,\theta, \tag{197}$$

iar în *coordonate carteziene* același arc am arătat că e situat pe parabola

$$(x + y)^2 = a\sqrt{2}\, x. \tag{198}$$

Transpunând în *coordonate polare* ecuația (197), având în vedere formula (160), obținem:

$$r = a\sqrt{2}\,\frac{sp\,\theta\, cp\,\theta}{\sin\theta}. \tag{199}$$

Cu această pregătire, vom calcula aria închisă A, mărginită de arcul O B P A O și axa Ox, în două moduri diferite: 1°. *In coordonate polare;* 2°. *In coordonate carteziene.*

1°. *In coordonate polare.* Ținând seamă de ecuația (199), putem scri:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sp^2\theta\, cp^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta. \tag{200}$$

2°. *In coordonate carteziene.*

Din ecuația (198) deducem

$$y = 2^{\frac{1}{4}}\sqrt{a\,x} - x,$$

astfel după cele ce știm, avem:

$$A = \int_0^{a\sqrt{2}} y\, dx = 2^{\frac{1}{4}}\sqrt{a}\int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{x}\, dx - \int_0^{a\sqrt{2}} x\, dx =$$

$$\frac{2^{\frac{5}{4}}\sqrt{a}}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)_0^{a\sqrt{2}} - \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{a\sqrt{2}}.$$

De aci deducem:

$$A = \frac{a^2}{3}. \tag{201}$$

Din compararea relațiilor (200) și (201) rezultă:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sp^2\theta\, cp^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{3}.$$

Observare. S'ar putea efectua multe alte integrale definite; una foarte importantă cred că este

$$\int_0^{\infty} \frac{sp\,x}{x}\, dx,$$

pe care n'am integrat'o încă.

V.

O problemă de mecanică soluționată cu funcțiuni patratice.

Vom termina lucrarea ce o prezentăm cu o chestiune de mecanică, căreia î-i vom da o soluțiune simplă folosind *funcțiunile patratice* studiate.

212. **Problemă.** *Un mobil* M *se mișcă, obligat să parcurgă conturul unui patrat de centru* O, *astfel ca raza vectoare* O M *să aibă o mișcare uniformă în jurul punctului* O. *Se cere:*

1°. *Legea care ne dă spațiul parcurs de mobilul* M *în funcție de timp.*

2°. *Punctele traectoriei cu accelerația nulă.*

Soluție. Fie A B C D patratul de centru O și de latură $AB = a$, pe care se mișcă mobilul M. Alegem sistemul rectangular cu axele A C, B D și origina O.

Presupunem întâi că mobilul M *pornește din* A *în momentul inițial* ($t = 0$) *și se mișcă în senzul săgeților,* (fig. 61).

Fie,

$$\theta = \sphericalangle\, A\,O\,M,$$

unghiul format de A O cu raza vectoare a lui M, la un timp oarecare t.

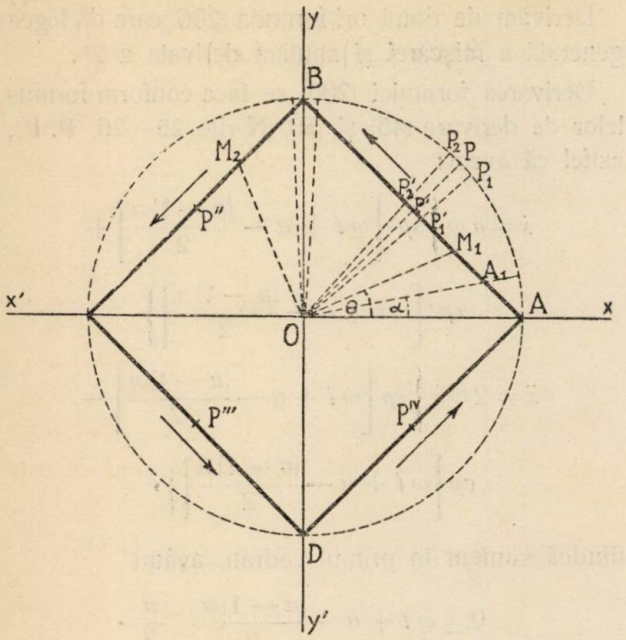


Fig. 61.

Conform enunțului,

$$\theta = \omega t,$$

unde ω este viteza unghiulară, constantă.

1°. *Să calculăm întâi spațiul*

$$A M = x,$$

în funcție de timp. Vom însemna cu M_i poziția lui M la timpul corespunzător t, i indicând cadranul în care se află, în mișcarea sa continuă pe contur, mobilul M.

Se impun spre cercetare următoarele faze:

Faza 1ª, când $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2\omega}$. In acest caz $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, deci mobilul este pe latura A B. Fie M_1 poziția sa la timpul t și $\theta = \sphericalangle A O M_1 = \omega t$.

Spațiul $A M_1 = x$ parcurs în timpul t se poate calcula astfel.

Considerăm triunghiul semidreptunghic $A O M_1$ ($A = 45^0$) și fiindcă $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, *teorema 1ª* (No. 54, P. II[a]), ne permite a scri

$$A M_1 = O A \sqrt{2}\, sp \widehat{A O M_1} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\, sp\, \theta,$$

sau:

$$\boxed{x = a\, sp\, \omega t} \quad (202)$$

Aceasta este formula care dă legea spațiului în prima fază.

Faza 2ª, când $\frac{\pi}{2\omega} \leqq t \leqq \frac{\pi}{\omega}$. In acest caz $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$, deci mobilul se mișcă pe latura B C. Fie M_2 poziția lui M la timpul t corespunzător și $\sphericalangle A O M_2 = \theta = \omega t$.

Spațiul $A B M_2 = x$ parcurs de mobil, evident că este

$$x = a + M B_2.$$

Dar din triunghiul semidreptunghic $O B M_2$ ($B = 45^0$) în care $\sphericalangle B O M_2 \leqq \frac{\pi}{2}$, deducem tot în virtutea *teoremei 1ª* (No 54, P. II[a]),

$$B M_2 = O B \sqrt{2}\, sp \widehat{B O M_2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\, sp \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

astfel că:

$$\boxed{x = a\left[1 + sp\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]} \quad (203)$$

Aceasta este formula care dă legea spațiului în a 2ª fază.

Faza nª, când $\frac{(n-1)\pi}{2\omega} \leqq t \leqq \frac{n\pi}{2\omega}$. In acest caz $\frac{(n-1)\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{n\pi}{2}$, deci mobilul M se mișcă pe latura din cadranul al n-lea. Fie M_n poziția sa la timpul t corespunzător și $\sphericalangle A O M_n = \theta = \omega t$.

Spațiul $A B C D A \ldots N M_n = x$ (N fiind al $(n-1)$-lea vârf al patratului), se compune din $A B C D A \ldots N = (n-1)\, a$ și $N M_n$, adică

$$x = (n-1)\, a + N M_n.$$

Dar din triunghiul semidreptunghic $O N M_n$ ($N = 45^0$) în care $\sphericalangle N O M_n \leqq \frac{\pi}{2}$, deducem tot în virtutea *teoremei 1ª* (No. 54, P. II[a]),

$$N M_n = O N \sqrt{2}\, sp \widehat{N O M_n} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\, sp \left[\omega t - \frac{(n-1)\pi}{2}\right],$$

deci:

$$(204) \quad \boxed{x = a\left\{n - 1 + sp\left[\omega t - \frac{(n-1)\pi}{2}\right]\right\}},$$

Aceasta este formula care dă legea spațiului în faza n^a.

Formula (204) *putem spune că, cuprinde legea generală a spațiului în funcție de timp, fiind că ea coincide cu formulele* (201), (203)... *pentru* $n = 1, 2, \ldots n$.

Presupunem acum că M **ar porni dintr'un punct** A_1 **al laturei** AB, **diferit de** A.

Fie $\sphericalangle A O A_1 = \alpha$ (cunoscut), M_1 poziția lui M la timpul t socotit din punctul de pornire A_1 și $A_1 M_1 = x$, $\sphericalangle A O M_1 = \theta = \omega t$.

Din triunghiurile semidreptunghice $A O M_1$ și $A O A_1$ ($A = 45^0$), în virtutea *teoremei* I^a (No. 54, P. II^a) avem respectiv

$$A M_1 = O A \sqrt{2}\, sp(\theta + \alpha) = a\, sp(\omega t + \alpha),$$

$$A A_1 = O A \sqrt{2}\, sp\, \alpha = a\, sp\, \alpha.$$

De aci deducem, observând că $x = A M_1 - A A_1$,

$$(205) \quad \boxed{x = a[sp(\omega t + \alpha) - sp\, \alpha]}.$$

Avem astfel legea spațiului în prima fază.

Analog găsim pentru faza n-a

$$(206) \quad \boxed{x = a\left\{n - 1 + sp\left[\omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2}\right] - sp\, \alpha\right\}}.$$

Formula (206) *cuprinde pentru* $n = 1, 2, \ldots n$ *legea spațiului pentru diferitele faze,* iar dacă $\alpha = 0$, coincide cu formula (204).

Observare. Este drept că formula (206) dă legea generală a spațiului în funcție de timp, când ne dăm faza, dar ea nu este o *formulă analitică,* neexistând o relație de dependență între n și t.

O soluție analitică a problemei, care să cuprindă întreg fenomenul, o vom da în „Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara", unde am dat o soluție analitică problemei *„Oscilațiilor amortizate"*,[1] asemănătoare problemei aci tratate.

2°. *Să găsim punctele traectoriei cu accelerație nulă.*

Derivăm de două ori formula (206) care dă legea generală a mișcării și anulăm derivata a 2^a.

Derivarea formulei (206) se face conform formulelor de derivare (45) și (50) (N-rile 25—26, P. I^a), astfel că avem:

$$\dot{x} = a\omega\left\{sp^2\left[\omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2}\right] + cp^2\left[\omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2}\right]\right\}$$

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{x}\left\{sp\left[\omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2}\right] - cp\left[\omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2}\right]\right\},$$

fiindcă suntem în primul cadran, având

$$0 \leq \omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Pentru a avea $\ddot{x} = 0$, cum $\dot{x} > 0$, trebuie ca

$$sp\left[\omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2}\right] = cp\left[\omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2}\right],$$

ecuație care în primul cadran are singura soluție

$$\omega t + \alpha - \frac{(n-1)\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

De aci deducem

$$t = \frac{(2n-1)\pi - 4\alpha}{4\omega},$$

valoare care introdusă în (206) ne dă

$$(207) \quad \boxed{x = \frac{(2n-1) - sp\, \alpha}{2} a},$$

fiindcă $sp\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

Formula (207), în care x este lungimea socotită pe conturul patratului A B C D din punctul de pornire A_1 a mobilului M, ne fixează punctele traectoriei de accelerație nulă.

[1]) *V. Alaci. Solution anaytique du problème des oscilations amortisées.* (Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, Tome 8, Fasc. 1—2).

Aceste puncte, corespunzătoare fazelor succesive studiate, sunt mijloacele laturilor A B, B C, C D, D A, *care apoi se repetă periodic.*

In afară de punctele P′, P″, P‴, P^{IV},... *care se văd în fig. 61, mai sunt şi punctele* B, C, D, A,... *în care acceleraţia este nulă,* puncte care au scăpat metodei expuse, fiindcă legea din formula (206), care dă spaţiul în funcţie de timp, nu este analitică.

De aceea recurgem la următoarea *metodă geometrică,* care va evidenţia şi punctele B, C, D, A,...

Pentru aceasta, să considerăm cercul circumscris patratului A B C D, (fig. 61). In timp ce punctul M se mişcă pe conturul patratului A B C D, punctul M′ situat pe raza O M şi pe cerc, descrie cercul cu o mişcare uniformă, conform enunţului.

Presupunem că M′ a ajuns în punctul P mijlocul arcului A B.

Fie P_1P şi PP_2 două arce descrise de M′ în două secunde consecutive, una care precede şi alta care urmează momentului când M′ trece prin P.

Evident că,

$$\overset{\frown}{P_1P} = \overset{\frown}{PP_2} \tag{208}$$

mişcarea lui M′ fiind uniformă.

Fie acum P_1', P′, P_2', punctele laturei A B situate respectiv şi pe razele OP_1, O P, OP_2.

Din relaţia (208) rezultă că şi

$$P_1'P' = P'P_2'.$$

Această relaţie invederează că mobilul M, care se mişcă pe latura A B, descrie în cele două secunde consecutive considerate mai sus, spaţii egale, care sunt de fapt vitezele corespunzătoare celor două secunde consecutive. *Aceste viteze fiind egale, urmează că acceleraţia mobilului* M, *când trece prin* P′, *este nulă.*

Acelaşi raţionament, ne îndreptăţeşte a afirma că şi P″, P‴, P^{IV},... *şi* B, C, D, A,... *sunt puncte ale traectoriei, cu acceleraţia nulă,* (fig. 61).

INCHEIERE.

Cunoştinţele cu totul noui ce prezentăm, sunt sigur că vor interesa pe acei ce se vor ocupa cu ele şi î-i vor îndemna să aducă alte contribuţii originale, care să se însumeze celor ce le-am expus.

Mai ales rezultatele neaşteptate ce le-am obţinut relativ la:

1$_0$. *Configuraţiile liniare şi curbilinii;*

2^0. *Transformările patratice şi aniipatratice.*

3^0. *Noul sistem de coordonate patratice,*

rezultate pe care ţin să le relev în mod deosebit, deschid noui orizonturi, noui domenii de cercetare, în care *funcţiunile patratice* se impun cu precădere ca instrumente de investigaţie.

De pe acum pot fi mulţumit, de aprecierile prea măgulitoare ce le-am primit din ţară şi din străinătate cu privire la cuprinsul acestei lucrări şi de înştiinţarea că vor apare în curând recenzii şi articole remarcabile, relative la *„Trlgonometria patratică“.*

Fie ca timpul să dea dreptate prevederilor mele, relative la contribuţiile noui şi întregitoare celor cuprinse în această lucrare şi pe care le aştept cu o vie satisfacţie.

O Geometrie Analitică detailată a *configuraţiilor liniare şi curbilinii,* care să cuprindă în special *poligoanele convexe şi concave* şi care în linii generale se desprinde şi din cuprinsul acestui volum, va fi una din preocupările mele imediate.

(Vor urma: Tabele de logaritmi).

NOTE MATEMATICE

11. — *Trouver 3 nombres de la forme* $x^2, y^{2\alpha}, z^2$ *en progression arithmétique.*

On doit avoir $x^2 + z^2 = 2(y^\alpha)^2$; on aura

$$\begin{cases} x = m^2 + 2mn - n^2 \\ z = m^2 - 2mn - n^2 \\ y^\alpha = m^2 + n^2, \text{ équation pour laquelle on a une solution paramétrique.} \end{cases}$$

Nons allons traiter en détail les cas de $\alpha = 2$ et 3.

$$\alpha = 2, m^2 + n^2 = y^2$$

$$\begin{cases} m = p^2 - q^2, \quad n = 2pq, \quad y = p^2 + q^2, \text{ ou} \\ m = 2pq, \quad n = p^2 - q^2. \end{cases}$$

$$\alpha = 3 \begin{cases} m = p^3 - 3pq^2, \ n = 3p^2q - q^3, \ y = p^2 + q^2, \text{ ou} \\ m = 3p^2q - q^3, \ n = p^3 - 3pq^2. \end{cases}$$

Exemples numériques.

$a = 2,\ p = 2,\ q = 1,\ 17^2,\ 5^4,\ 31^2$, raison $= 336$.

$a = 3,\ p = 2,\ q = 1,\ 73^2,\ 5^6,\ 161^2$, raison $= 10296$.

A. GLODEN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XLIV, No. 11, Iulie 1939. Comemorarea profesorului *G. Ţiţeica* de către „Cercul Matematic al Societăţii de Ştiinţe din Cluj" (urmare). Ediţia de la *Cluj* a elementelor lui *I. G. Pardies,* de *Victor Marian.* Problema 1379, de *Gh. Th. Gheorghiu.* Asupra unei probleme a lui *Goursat,* de *Radu Bădescu.* Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului de *Geometrie elementară,* de *C. Ionescu-Bujor* şi *Al. Bunescu.* Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Idem,* No. 12, August 1939. † Generalul *Scarlat Panaitescu,* de Cpt. C-dor *I Linteş.* Studenţi români în matematici la *Paris* între 1870 şi 1877, de *Petre Sergescu.* Ediţia de la *Cluj* a elementelor lui *I. G. Pardies* (urmare şi sfârşit), de *Victor Marian.* Asupra problemei 4553, de *G. G. Constantinescu.* Proprietăţi în câmpul traectoriilor antiaeriene, de Maior *I. Linteş.* Premiu *„Spiru Haret",* de Ing. *C. Orăşanu* şi Ing. *D. Stan.* Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Idem,* anul XLV, No. 1, Septemvrie 1939. Lista Membrilor Societăţii *„Gazetei Matematice".* Membrii decedaţi. Extinderi în legătură cu indicatorii, de Cpt. C-dor *I. Linteş.* Concursul *„Gazetei Matematice"* din 1940. Premii, burse şi publicaţii, din veniturile Societăţii *„Gazeta Matematice".* Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Boletin Matematico,* anul XII, No. 7, Iunie 1939, *Buenos-Aires.* Incercări de *Geometrie analitică complexă,* de *B. I. Baidaff.* Asupra unor drepte importante ale unui triunghiu, de *Virgiliu Claudian.* Contestaţii la unele probleme. Probleme propuse.

5. *Idem,* anul XII, No. 8, Iunie 1939. Ecuaţii de gradul al 3-lea cu rădăcini complexe: Determinarea lor grafică, de *A. Heurtley de la Riestra.* Asupra a două formule a elipsei şi a iperbolei, de *B. I. Baidaff.* Asupra unei relaţiuni quartigrade, de *A. Gloden.* Probleme rezolvate şi propuse.

6. *Idem,* anul XII, No. 9, Iulie 1939. Generalizarea teoremei lui *Laguerre,* de *S. Sispanov.* Asupra rezolvării în numere întregi a sistemului $A^{kx} + B^{kx} + C^{kx} + D^{kx} = E^x + F^x + G^x + H^x$ ($x = 1, 2$ şi 3), de *A. Gloden.* Informaţii. Răspunsuri. Probleme propuse.

7. *Idem,* anul XII, No. 10, Iulie 1939. O generalizare asupra alteia, de *B. I. Baidaff.* Asupra relaţiilor între patrate, de *A. Gloden.* Probleme rezolvate şi propuse.

8. *A. G. Ioachimescu. Culegere de Probleme de Algebră.* Partea II^a, Ediţia IV. Acest volum al marelui profesor *Ioachimescu,* revăzut şi complectat de d-nii profesori *Ovidiu Ţino* şi *Ionescu-Bujor* este de un folos real pentru elevii de liceu, studenţi şi toţi iubitorii de matematici. Dată fiind importanţa acestui volum, el va apare în curând tradus în limba spaniolă de d-l Dr. *B. I. Baidaff.* Recomandăm călduros acest volum corespondenţilor noştrii.

9. *William Barret.* Sur la structure des groupes semi-simples réels. (Thèse, Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, Vol. IX, Fasc. 1—2).

10. *Ing. Constantin Teodorescu.* Compararea încercărilor de laborator pentru ciment. (Extras din Buletinul Institutului Român pentru betoane).

11. *Dr. Cândea Constantin.* Titluri şi lucrări.

12. *Dott. Vincenzo G. Cavallaro.* Una notevole construzione che deduce l'angolo di *„Brocard"* dai centri isogoni.

13. *Vincenzo G. Cavallaro.* Richerche sulle Sezioni dei Diedri. (Estratto dal Bolletino di Matematica, 1925).

14. *Vincenzo G. Cavallaro.* Fondamenti vincolati e completi delle geometrografie, elementi per la riduzione simbolica del linguaggio construttivo, note varie e bibliografia.

15. *Vincenzo G. Cavallaro.* Sviluppo naturale e visione unitaria nella Geometria del Triango.

16. *Vincenzo G. Cavallaro.* La genesi e la sviluppo naturale delle construzioni classiche relative ai punti di *„Brocard",* di *Lemoine,* etc.

17. *Théophile T. Vescan.* Teze prezentate facultăţii de ştiinţe a universităţii din Cluj, pentru obţinerea titlului de doctor în ştiinţele fizice, 1939.

18. *Théophile T. Vescan.* Note sur les orbites relativiste des planétes. (Académie des Sciences de Paris, 10 Juillet 1939).

19. *Dr. Erich Stern.* Professeur *D. N. Lehmer.*

ERATA.

Corrections dans l'article *„Carrés à produits magiques"* par le Dr. *Erich Stern* (Amsterdam) en No 4, pp. 49—52.

p. 50, col. I, ligne 1, au lieu de *que'on,* lire *qu'on.*
„ 51, „ II, ligne 8, au lieu de *preduit,* lire *produit.*
„ 51, „ II, ligne 9, au-dessous, lire $(f.g)^3$.
„ 51, „ II, ligne 6, au-dessous, au lieu de $a_3 = f_1$, lire $a_3 = f$.
„ 51, „ II, ligne 4, au dessous, lire $f \neq g^3$.
„ 51, „ II, dernière ligne, au lieu de *on,* lire *un.*
„ 52, „ I, ligne 2, lire $6^3 = 216$.
„ 52, „ I, ligne 4, au lieu de $a = 4$, lire $a_4 = 4$.
„ 52, „ II, ligne 1, au lieu de *Fa,* lire *La.*

PROBLEME REZOLVATE

1406. — *Se dă în plan un cerc* O_1 *şi un punct* M *exterior lui. Se duc tangentele* MA_1, MB_1 *la* O_1 *şi se iau intersecţiile* D_1, E_1 *ale acestor tangente cu* B_1O *şi* A_1O_1.

Fie O_2 *centrul cercului circumscris trapezului* $A_1B_1E_1D_1$. *Se construesc faţă de cercul* O_2 *punctele* A_2, B_2, E_2, D_2 *analog cu* A_1, B_1, E_1, D_1 *faţă de* O_1. *Se construeşte cercul* O_3 *circumscris trapezului* $A_2B_2D_2E_2$ *şi se obţin prin construcţii analoage punctele* A_3, B_3, D_3, E_3 *şi aşa mai departe. Să se demonstreze că punctele* A_i, A_{i+k} *şi* B_i, B_{i+k} *sunt pe două drepte simetrice faţă de* MO_1 *şi punctele* D_i, D_{i+k} *şi* E_i, E_{i+k}[1] *sunt pe alte două drepte simetrice faţa de* MO_1.

G-L GH. BUICLIU

Vom da demonstraţia pentru A_1, A_2 şi B_1, B_2, D_1, D_2 şi E_1, E_2. Aceiaşi demonstraţie se aplică pentru două perechi de puncte ca în enunţ.

MA_1, MB_1 fiind tangente la cercul O_1 sunt tangente, iar

$$(1) \qquad \sphericalangle A_1MO_1 = \sphericalangle B_1MO_1.$$

La fel MA_2, MB_2 sunt egale şi

$$(2) \qquad \sphericalangle A_2MO_1 = B_2MO_1.$$

Scăzând (1) din (2), rezultă

$$\sphericalangle A_2MA_1 = \sphericalangle B_2MB_1,$$

deci triunghiurile A_2MA_1, B_2MB_1 sunt egale. Fie N, N' intersecţia lui MO_1 cu A_2A_1 şi cu B_2B_1. Din cele precedente rezultă că

$$\sphericalangle NA_2M = \sphericalangle N'B_2M, \quad \sphericalangle A_2MN = \sphericalangle B_2MN'$$

$$A_2M = B_2M,$$

de unde

$$MN = MN' \quad \text{şi} \quad \sphericalangle A_2NM = \sphericalangle B_2N'M,$$

ceiace înseamnă că N se confundă cu N' şi că A_2A_1 este simetrică lui B_2B_1 faţă de MO_1.

Absolut la fel se demonstrează că D_2D_1 sunt simetrice faţă de MO_1.

[1]) In enunţul de la pag. 60, Vol. XV s-au omis din eroare A_{i+k}, B_{i+k}. D_{i+k}, E_{i+k}.

Doi corespondenţi au reuşit să demonstreze prin raţionamente falşe că A_i, B_i sunt pe două drepte simetrice faţă de MO_1. Aceasta ar însemna că punctele A_1, A_2, A_3, ... A_i sunt în linie dreaptă, ceiace nu este adevărat.

Se poate însă demonstra cu uşurinţă că punctele A_{i+1}, B_{i+1}, O_i, D_{i-1}, E_{i-1} sunt colineare pe perpendiculara în O_i pe MO_1.

G-l Gh. B.

1748. — *Să se demonstreze că derivata funcţiunii*

$$x - \lg \sqrt[4]{1 - 2\,sp\,x\,cp\,x} + \frac{\operatorname{arc\,tg}(1 - 2\,sp\,x)}{2}$$

este $cp\,x$, *dacă* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ($sp\,x$ *şi* $cp\,x$, *înseamnă sinusul patratic de* x *şi cosinusul patratic de* x).

V. ALACI

Notând cu y funcţiunea dată şi punând'o sub forma

$$y = x - \frac{1}{4}\lg(1 - 2\,sp\,x\,cp\,x) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(1 - 2\,sp\,x),$$

obţinem prin derivarea ei, conform formulelor (46) pag. 125 şi (50) pag. 126 din R. M. T., No. 11, anul XII:

$$y' = 1 + \frac{(sp^2x + cp^2x)(cp\,x - sp\,x)}{2(1 - sp\,x\,cp\,x)} - \frac{sp^2x + cp^2x}{2(1 - 2sp\,x + 2sp^2x)}.$$

Cum, $cp\,x = 1 - sp\,x$ din formula (4) pag. 112 No. 10 an. XVIII al R. M. T., avem:

$$y' = 1 + \frac{(sp^2x + cp^2x)(cp\,x - sp\,x)}{2(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2x)} - \frac{sp^2 + cp^2x}{2(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2x)} =$$

$$1 + \frac{(sp^2x + cp^2x)(cp\,x - sp\,x - 1)}{2(1 - 2\,sp\,x + sp^2x)}.$$

Ţinând din nou seamă că $cp\,x = 1 - sp\,x$, mai putem scri:

$$y' = 1 + \frac{[sp^2x + (1 - sp\,x)^2](-2\,sp\,x)}{2(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2x)} =$$

$$1 - \frac{(1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2x)\,sp\,x}{1 - 2\,sp\,x + 2\,sp^2x}.$$

Simplificând, avem

$$y' = 1 - sp\,x = cp\,x,$$

în virtutea formulei (4), pag. 112, No. 10, an XVIII, al „R. M. T.“.

Soluție dată de d-nii: *Jidanu C. C-tin* (bacalaureat, Bacău), *Mioc Vasile* (Inspector școlar), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Staicu I. N.* (lic Milit, Nicolae Filipescu), *Segal Zigu* (Vaslui) și *Vișa Eugen* (Profesor).

Observare. Soluția a fost redactată după aceea a d-lui Inspector *V. Mioc*.

PROBLEME PROPUSE

1792. — Să se găsească cea mai mică bază posibilă a unui sistem de numerație în care să existe un cub de patru cifre de forma $a\,b\,a\,b$.

V. THÉBAULT

1793. — Să se arate că pentru $x \geqq 0{,}50$, avem:

$$\sqrt{x+\sqrt{x-0{,}25}}-\sqrt{x-\sqrt{x-0{,}25}}=1$$

și pentru $0{,}25 \leqq x \leqq 0{,}50$, avem

$$\sqrt{x+\sqrt{x-0{,}25}}+\sqrt{x-\sqrt{x-0{,}25}}=1.$$

L-T C. IONESCU-ȚIU

1794. — Să se găsească m în așa fel ca ecuațiile

$$\begin{cases} x^2-3mx-2(m-1)=0 \\ mx^2-4mx+3=0 \end{cases}$$

să aibă o rădăcină comună.

GH TH. GHEORGHIU

1795. — Să se demonstreze că triunghiul pseudoisoscel nu poate avea laturile în progresie aritmetică și nici nu poate fi automedian.

G-L GH. BUICLIU

1796. — Se consideră patru puncte conciclice A, B, C, D, astfel ca D și mijlocul arcului AB să fie diametral opuse. Fie E intersecția dreptelor BD și AC, F un punct pe coarda AD, ușa ca $\overline{DF}=\overline{DE}$ și G intersecția dreptei AD cu cercul tangent dreptei BC și trecând prin punctele B și F. Să se arate că, paralela dusă din C la BG este tangentă la cercul circumscris triunghiului BCE.

MARIA NEUMANN

1797. — Să se construiască curba reprezentată în coordonate rectangulare prin ecuația:

$$x^2y^2-4(x+y)=0.$$

EUGEN VISA

1798. — Să se dea o generalizare relației,

$$\begin{cases} A^{2n}+A^{2n}=B^2+C^2+D^2 \\ A^{4n}+A^{4n}=B^4+C^4+D^4 \\ B+C=D, \end{cases}$$

în numere întregi, cu condiția ca A, B, C și D să nu aibă factori comuni.

Exemplu:

$$\begin{cases} 7^8+7^8=1265^2+880^3+2145^2 \\ 7^{16}+7^{16}=1265^4+880^4+2145^4 \\ 1265+880=2145. \end{cases}$$

A. MOESSNER

1799. — Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{4}.$$

MARIN F. VADUVA

1800. — Se cere configurația reprezentată parametric prin ecuațiile:

$$\begin{cases} x=a\,sp\,\theta+b\,cp\,\theta \\ y=c\,sp\,\theta+d\,cp\,\theta. \end{cases}$$

Să se determine unghiul θ corespunzător unui punct P al configurației și invers.

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. (1583, 1614, 1640, 1665, 1684, 1688); *Buznea D. Dinu* (1757, 1763, 1774, 1765, 1778); *Cazanacli V. Petre* (1752, 1753, 1754, 1757, 1758, 1760, 1763, 1764, 1765); *Cherfman S. M.* (N., 1664, 1667, 1683, 1720, 1735, 1746, 1766, 1777); *Cristea I. N.* (P., 1570, 1585, 1617, 1647, 1707, 1730, 1735, 1751, 1752, 1753, 1757, 1760, 1761, 1765, 1768, 1776, 1777, 1778); *Grumăzescu M.* (P.); *Jidanu I. C-tin* (N., P., 230, 259, 347, 361, 369, 390, 393, 414, 418, 478, 531, 634, 649, 1183, 1231, 1474, 1493, 1498, 1511, 1514, 1559, 1560, 1564, 1575, 1577, 1593, 1604, 1607, 1615, 1622, 1624, 1639, 1646, 1655, 1661, 1684, 1685, 1705, 1709, 1720, 1721, 1725, 1728, 1734, 1736, 1743, 1745, 1752, 1757, 1758, 1760, 1763, 1765, 1766, 1767, 1769, 1770, 1782, 1784, 1785, 1788, 1790); *Logofătu M. Ioan* (1587, 1633, 1619, 1650, 1652, 1778, 1783); *Mahrenholz Johannes* (1785, 1786, 1787, 1788); *Mărgineanu Ion* (P); *Mereuţă Emilian* (P); *Mihoc N. Ovidiu* (N., 1640, 1659, 1664, 1681, 1683, 1687, 1688, 1696, 1697, 1699, 1703, 1704, 1707, 1726, 1727, 1729, 1752, 1754, 1756, 1760, 1763, 1766, 1767, 1774, 1776, 1777, 1778, 1785, 1786, 1790); *Modâlcă S. Emil* (N., P., 1475, 1516, 1629, 1690, 1693, 1705, 1745, 1746, 1751, 1752, 1770, 1773, 1777, 1778, 1779, 1785, 1786, 1787); *Papadodol D. Elena* (P., 1760, 1787, 1791); *Popescu N. Corneliu* (P., 1752, 1756, 1757, 1760, 1763, 1765, 1768, 1769, 1770, 1773, 1774, 1776, 1777, 1778, 1782, 1785, 1786, 1787, 1789, 1790); *Săruleşteanu I. Emanoil* (1729, 1752, 1766); *Slavov Iacob* (1688, 1777); *Tică P. Marin-Gall* (1000, 1149, 1188, 1250, 1405, 1681, 1684, 1688, 1696, 1741, 1751, 1760, 1774, 1785); *Ţarălungă Savel* (P., 1752, 1768); *Vasu Vasile* (P); *Văduva Fl. Marin* (1761, 1766, 1777, 1785); *Vişa Eugen* (1731, 1734, 1743, 1758, 1766, 1775); *Zamfirescu Gh. I.* (P.).

INFORMAŢIUNI

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XII-LEA

care a început în Martie 1939.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XII, care a început în Martie 1939, s'au primit până acum la Redacţia „R. M. T." următoarele abonamente:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.
2. *Dr. C. Borş*, Liceul Comercial Piatra-Neamţ.
3. *Dr. Mihail Botez.* Strada I. G. Duca 15, Piatra-Neamţ.
4. *Lt. C. Costăchescu.* Submarinul „Delfinul", Constanţa.

A APĂRUT IN BIBLIOTECA GAZETEI MATEMATICE:

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

Partea II,

Preţul 125 Lei — TRIGONOMETRIA PLANĂ

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XIX, care a început la 15 Martie 1939.

ANUL XIX DECEMVRIE 1939 No. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 **A. GLODEN:** SUR LES CHAINES MULTIGRADES.

2. NOTE MATEMATICE: 12.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 1748, 1766, 1791, 1880.

5. PROBLEME PROPUSE: 1801-1808.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XIX — No. 10 TIMISOARA, DECEMVRIE 1939

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN
Şcoala Politechnică, Timişoara.

INŞTIINŢARE.

Fostul rector şi profesor al Şcoalei Politechnice din Timişoara, Ing. *C. Teodorescu,* delegat cu administraţia „R. M. T.“, a fost transferat pe data de 15 Octomvrie 1939 la catedra de Rezistenţa Materialelor, la Politechnica din Bucureşti.

Plecarea D-sale a lăsat un profund regret printre colegi şi studenţi, pentru că am simţit cu toţii că s'a desprins din mijlocul nostru o forţă de prima calitate, definită prin componentele sale: *intelectuală, morală* şi *sufletească,* atât de impresionante.

Ca un corolar al acestor componente potenţate, am putut constata că, D-sa a fost un cercetător asidiu al specialităţii sale, un pedagog distins, iubit de studenţi, un susţinător aprig al năzuinţelor spirituale ale şcoalei noastre, un coleg afabil, gata a se solidariza şi a înfăptui orice gând crescător de prestigiu, pentru colegi şi pentru şcoală.

Timp de 18 ani, D-sa a administrat „R. M. T.“, asigurându-i în calitate de rector şi fondurile necesare de apariţie, iar acum la plecare, pentru a nu se produce o discontinuitate, a încredinţat această sarcină, D-lui Dr. Ing. *Ştefan Nadaşan,* fostul D-sale asistent.

„R. M. T.“ regretând sincer plecarea D-sale, îi face cele mai bune urări, dorindu-i ca acolo unde se află, să găsească aceiaşi atmosferă compatibilă dezvoltării calităţilor cu care este înzestrat şi îl consideră şi pe mai departe ca membru activ.

Redacţia.

SUR LES CHAÎNES MULTIGRADES

PAR A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

Définitions. Nous appellons chaîne multigrade un système diophantien de la forme

$$a_1^p + a_2^p + \cdots = b_1^p + b_2^p + \cdots = c_1^p + c_2^p + \cdots,$$

l'exposant p pouvant prendre successivement diverses valeurs entières. Si $p = 1, 2 \ldots (n-1)$, n, la chaîne sera dite vraie aux n premiers degrés. Pour simplifier l'écriture, nous la représenterons par les égalités

$$a_1,\ a_2 \ldots \overset{n}{=} b_1,\ b_2, \ldots \overset{n}{=} c_1,\ c_2, \ldots,$$

ou encore,

$$a_i \overset{n}{=} b_i \overset{n}{=} c_i = \ldots$$

On peut envisager aussi le système plus général

$$\alpha_1 a_1^p + \alpha_2 a_2^p + \cdots \overset{n}{=} \beta_1 b_1^p + \beta_2 b_2^p + \cdots$$
$$\cdots \overset{n}{=} \gamma_1 c_1^p + \gamma_2 c_2^p + \cdots,$$

que nous écrirons, d'une manière abrégée,

$$\alpha_1 a_1,\ \alpha_2 a_2, \ldots \overset{n}{=} \beta_1 b_1,\ \beta_2 b_2, \ldots \overset{n}{=} \gamma_1 c_1,\ \gamma_2 c_2, \ldots,$$

ou

$$\alpha_i a_i \overset{n}{=} \beta_i b_i \overset{n}{=} \gamma_i c_i,$$

étant entendu que les α_i, β_i, γ_i, sont des coefficients.

Théorèmes généraux sur les chaînes multigrades.

I. *De la chaîne*

$$a_i \overset{n}{=} b_i \overset{n}{=} c_i,$$

vraie aux n premiers degrés et renfermant r termes par membre, on déduit la chaîne suivante, vérifiée aux n premiers degrés, avec (2 r) termes par membre et 6 maillons, $a_i,\ b_i + h \overset{n}{=} a_i + h,\ b_i \overset{n}{=} b_i,\ c_i + h \overset{n}{=} b_i + h,\ c_i \overset{n}{=} c_i,\ a_i + h \overset{n}{=} c_i + h,\ a_i, h$ *étant un entier quelconque.*[1])

Exemple:

$1, 12, 14 \overset{2}{=} 2, 9, 16 \overset{2}{=} 4, 6, 17.$

$1, 12, 14, 3, 10, 17 = 2, 13, 15, 2, 9, 16,$ $S_3 = 10413.$

$2, 9, 16, 5, 7, 18 = 4, 6, 17, 3, 10, 17,$ $S_3' = 11133.$

$4, 6, 17, 2, 13, 15 = 1, 12, 14, 5, 7, 18,$ $S_3'' = 10773.$

$S_1 = 57, \quad S_2 = 739.$

[1]) Voir: *A. Gloden,* Sur les égalités multigrades.

II. *De la chaîne*

$$a_i \overset{n}{=} b_i \overset{n}{=} c_i$$

vraie aux n premiers degrés et renfermant r termes par membre, on déduit la chaîne suivante, vérifiée aux $(n+1)$ premiers degrés, avec $(3r)$ termes par maillon

$$a_i,\ b_i+h,\ c_i+k \overset{n+1}{=} a_i,\ b_i+k,\ c_i+h \overset{n+1}{=}$$

$$a_i+h,\ b_i,\ c_i+k \overset{n+1}{=} a_i+k,\ b_i,\ c_i+h \overset{n+1}{=}$$

$$a_i+h,\ b_i+k,\ c_i \overset{n+1}{=} a_i+k,\ b_i+h,\ c_i,$$

h et k étant des entiers quelconques.

Si le nombre de maillons de la chaîne primitive est N, celui de la nouvelle chaîne sera de N!

Exemples: De $2+3 \overset{1}{=} 1+4 \overset{1}{=} 0+5$ on déduit la chaîne bigrade

$$2, 2, 2, 3, 5, 7 \overset{2}{=} 1, 2, 3, 3, 6, 6 \overset{2}{=} 1, 2, 3, 4, 4, 7 \overset{2}{=}$$
$$1, 1, 4, 4, 5, 6 \overset{2}{=} 0, 3, 3, 4, 5, 6 \overset{2}{=} 0, 2, 4, 5, 5, 5.$$
$$S_1 = 21, \quad S_2 = 95.$$

On en tire la chaîne suivante, à 4 termes par maillon:

$$2, 2, 5, 7 \overset{2}{=} 1, 3, 6, 6 \overset{2}{=} 1, 4, 4, 7.$$
$$S_1 = 16 = 2^4, \quad S_2 = 82.$$

Des identités

$$(I') \qquad 2+3 \overset{1}{=} 1+4 \overset{1}{=} 0+5,$$

nous avons déduit les chaînes suivantes formées à l'aide des nombres entiers < 12.

$$(II') \quad 1+2.2+5+6 \overset{2}{=} 2.1+2.4+6 \overset{2}{=} 0+2+4+2.5,$$
$$S_1 = 16, \quad S_2 = 70.$$

Nous écrirons, pour simplifier

$$1, 2.2, 5, 6 \overset{2}{=} 2.1, 2.4, 6 \overset{2}{=} 2, 4, 2.5.$$

$$(III') \quad 2.1, 3.2, 3.5, 2.6 \overset{3}{=} 3.1, 2.3, 2.4, 3.6 \overset{3}{=}$$
$$3.2, 3, 4, 3.5, 7.$$
$$S_1 = 35, \quad S_2 = 161, \quad S_3 = 833.$$

$$(IV') \quad 2.1, 3.2, 5.5, 3.6, 8, 9 \overset{4}{=} 3.1, 3, 5.4, 2.6, 3.7, 9 \overset{4}{=}$$
$$2.2, 3.3, 4\ 4.5, 7, 3.8$$
$$S_1 = 68, \ldots S_4 = 17720$$

$$(V') \quad 3.1, 4.2, 2.4, 10.5, 2.6, 4.8, 3.9 \overset{5}{=}$$
$$4.1, 4.3, 6.4, 6.6, 4.7, 4.9 \overset{5}{=}$$
$$5.2, 4.3, 8.5, 4.7, 5.8, 1.10$$
$$S_1 = 140, \quad S_2 = 872 \ldots S_5 = 357200.$$

$$(VI') \quad 4.1, 5.2, 6.4, 14.5, 8.8, 4.9, 10, 11 \overset{6}{=}$$
$$5.1, 8.3, 6.4, 14.6, 9\ 9, 11 \overset{6}{=}$$
$$9\ 2, 3.3, 14.5, 6.7, 5.8, 5.10$$
$$S_1 = 229, \ S_2 = 1527 \ldots S_6 = 7238127.$$

Cette dernière identité multiple renferme 43 termes par membre, un terme de la dernière ligne étant nul. Il est essentiel de remarquer que dans les produits qui figurent ci-dessus le premier facteur représente dans tous les cas un *coefficient.*

Une chaîne sextigrade à 3 maillons renfermant 11 termes par membre:

$$1, 31, 63, \ 88, 150, 164\ 212, 237, 290, 299, 346 \overset{6}{=}$$
$$3, 31, 50, 112, 137, 164, 199, 261, 286, 290, 348 \overset{6}{=}$$
$$8, 17, 70, \ 95, 143, 157, 219, 241, 276, 306, 346$$
$$S_1 = 1881, \quad S_2 = 456401, \ldots$$

Une autre chaîne sextigrade à 3 maillons, avec 13 termes par membre, en nombres plus petits que ceux de la précédente:

$$1,36,50,54,77,125,127,148,148,171,204,219,242 \overset{6}{=}$$
$$5,28,36,76,99,\ 99,122,127,170,193,197,204,246 \overset{6}{=}$$
$$8,19,42,85,90,\ 99,113,136,176,184,197,207,246$$
$$S_1 = 1602, \quad S_2 = 265586, \ldots$$

Le théorème II se déduit immédiatement de celui-ci: Si 3 polynômes entiers en x de même degré, $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ ont leurs n premiers coefficients respectivement égaux, celui de la plus haute puissance de x étant partout égal à 1, alors les 6 polynômes

$$F(x)\,G(x+h)\,H(x+k), \qquad F(x)\,G(x+k)\,H(x+h),$$
$$F(x+h)\,G(x)\,H(x+k), \qquad F(x+k)\,G(x)\,H(x+h),$$
$$F(x+h)\,G(x+k)\,H(x), \qquad F(x+k)\,G(x+h)\,H(x),$$

auront leurs $(n+1)$ premiers coefficients respectivement égaux; h, k, entiers arbitraires.

C'est un corollaire d'un théoréme énoncé par *Escott* [Quartuly Journal of Mathematics, 1910, pp. 141 – 167].

III. De la chaîne

$$a_i \overset{x}{=} b_i \overset{x}{=} c_i, \quad (x = 2, 4 \ldots 2n-2, 2n),$$

contenant un même nombre de termes dans chaque

chaînon, on déduit la suivante, avec un nombre de termes 6 fois plus grand par maillon

$$a_i+r,\ a_i-r,\ b_i+s,\ b_i-s,\ c_i+t,\ c_i-t \overset{x}{=}$$
$$a_i+r,\ a_i-r,\ b_i+t,\ b_i-t,\ c_i+s,\ c_i-s \overset{x}{=}$$
$$a_i+s,\ a_i-s,\ b_i+r,\ b_i-r,\ c_i+t,\ c_i-t \overset{x}{=}$$
$$a_i+s,\ a_i-s,\ b_i+t,\ b_i-t,\ c_i+r,\ c_i-r \overset{x}{=}$$
$$a_i+t,\ a_i-t,\ b_i+r,\ b_i-r,\ c_i+s,\ c_i-s \overset{x}{=}$$
$$a_i+t,\ a_i-t,\ b_i+s,\ b_i-s,\ c_i+r,\ c_i-r,$$
$$x=2,4,\dots 2n,\ 2n+2,$$

r, s, t, étant des entiers quelconques, $r\neq s\neq t$.

Exemple: $25{,}0 \overset{x}{=} 20{,}15 \overset{x}{=} 24{,}7$, $x=2$.

Nous en déduisons la chaîne à 6 maillons

1, 1, 4, 10, 13, 17, 18, 21, 22, 24, 26, $27 \overset{x}{=}$
1, 1 5, 9, 12, 17, 18, 22, 23, 24, 26, $26 \overset{x}{=}$
3, 3, 6, 8, 13, 17, 18, 22, 22, 23, 25, $28 \overset{x}{=}$
2, 2, 6, 8, 12, 17, 18, 23, 23, 23, 25, $27 \overset{x}{=}$
2, 2, 4, 10, 14, 16, 19, 21, 21, 23, 27, $27 \overset{x}{=}$
3, 3, 5, 9, 14, 16, 19 21, 22, 22, 26, 28

$(x=2,4)$. $S_2=3806$, $S_4=1976246$.

On peut en extraire par exemple la chaîne suivante, à 3 maillons, et à 10 termes par chaînon:

1, 1, 4, 10, 13, 17, 18, 21, 24, $27 \overset{x}{=}$
1, 1, 5, 9, 12, 17, 18, 23, 24, $26 \overset{x}{=}$
3, 3, 5, 9, 14, 16, 19, 21, 22, 28

$(x=2,4)$. $S_2=2646$, $S_4=1285014$.

IV. De la chaîne

$$a_i \overset{x}{=} b_i \overset{x}{=} c_i, \qquad x=1,3,\dots,(2n-1),$$

contenant m_i termes par maillon, on déduit la suivante:

$$a_i+r,\ a_i-r,\ -a_i+s,\ -a_i-s \overset{x}{=}$$
$$b_i+r,\ b_i-r,\ -b_i+s,\ -b_i-s \overset{x}{=}$$
$$c_i+r,\ c_i-r,\ -c_i+s,\ -c_i-s,$$

r et s étant des entiers quelconque, vraie pour

$$x=1,3,\dots,(2n-1),\ (2n+1),$$

avec, dans chaque maillon, 4 fois plus de termes qu'auparavant.

Exemple: De $1+5 \overset{1}{=} 2+4 \overset{1}{=} 3+3$, je déduis la chaîne

$8,-2,-6 \overset{x}{=} 7,-1,-3,-3 \overset{x}{=} 6,6,-2,-2,-4,-4,$

$(x=1,3)$, $S_1=0$, $S_3=288=2.12^2$.

On trouve aussi

17, 7. 5, 3, 3, −9, −11, $-15 \overset{x}{=}$
16, 6, 4, 4, 2, 2, −10, −12, $-12 \overset{x}{=}$
15, 15, 5, 5, 3, 3, 1, 1, −11, −11, −13, −13

$(x=1,3,5)$, $S_1=S_3=0$, $S_5=460800$.

Notons l'identité double

11, $13 \overset{x}{=} 1,3,5,15$, $S_1=24$, $S_3=3528$.

Voici une autre, chaîne multigrade

$$\begin{cases} 12 \text{ termes} \rightarrow & 20,14,10,10,10,-2,-4,-4,-6,-12,-18,-18 \overset{x}{=} \\ 16 \quad \text{„} \rightarrow & 19,13,13,11,11,11,-1,-1,-3,-3,-3,-5,-15,-15,-15,-17 \overset{x}{=} \\ 20 \quad \text{„} \rightarrow & 18,18,12,12,12,12,12,12,-2,-2,-2,-2,-4,-4,-14,-14,-16,-16,-16,-16, \end{cases}$$

$(x=1,3,5,7)$, $S_1=0$.

Du 1er et du 3e maillon je déduis l'égalité multigrade ci-après:

$10^x+4.8^x+3.7^x+3.5^x+3.1^x=4.9^x+7.6^x+3^x$,

$(x=1,3.5,7)$, $S_1=81=3^4$, $S_3=4455=5113^4$,

14 respectives 12 termes par membre.

V. De la chaîne

$$a_i \overset{x}{=} b_i \overset{x}{=} c_i, \qquad x=2,4\dots 2n,$$

le nombre de termes étant le même dans chaque chaînon, on déduit la suivante

$$-a_i+t,\ a_i+t \overset{x}{=} -b_i+t,\ b_i+t \overset{x}{=} -c_i+t,\ c_i+t,$$

t entier quelconque

$$x=1,2\dots,2n,\ 2n+1,$$

avec un nombre double de termes dans chaque chaînon.

Exemples.

a. $25{,}0 \overset{x}{=} 20{,}15 \overset{x}{=} 24{,}7$, $x=2$, $t=26$,

1, 26, 26, $51 \overset{x}{=} 6$, 11, 41, $46 \overset{x}{=} 2$, 19, 33, 50, $(x=1,2,3)$

$S_1=104$, $S_2=3954$, $S_3=167804$.

b. $49, 49, 0 \overset{x}{=} 16, 39, 55 \overset{x}{=} 21, 35, 56, (x=2,4), t=57,$
$8, 8, 57, 57, 106, 106 \overset{x}{=} 2, 18, 41, 73, 96, 112 \overset{x}{=}$
$1, 22, 36, 78, 92, 113,$
$(x=1, 2, 3, 4, 5), \quad S_1 = 342, \ldots$

Si l'on supprime à l'intérieur de chaque chaînon les nombres opposés il reste une chaîne vraie seulement aux degrés impairs $1, 3, \ldots, 2n-1, 2n+1$.

VI. De la chaîne

$$a_i \overset{x}{=} b_i \overset{x}{=} c_i, \quad x = 1, 3, \ldots, 2n-1,$$

renfermant m_i termes par maillon, on déduit celle-ci:

$$a_i + t, \quad -b_i + t, \quad -c_i + t \overset{x}{=}$$
$$b_i + t, \quad -c_i + t, \quad -a_i + t \overset{x}{=}$$
$$c_i + t, \quad -a_i + t, \quad -b_i + t,$$

t étant un entier quelconque, $x=1, 2\ldots, 2n-1, 2n$, avec Σm_i termes dans chaque chaînon.

Exemple: $1+4=2+3=5+0, \quad t=2,$
$3, 6, 0, -1, -3, -2 = 4, 5, 1, -2, -3, -2 =$
$5, 0, 1, -2, -3, -2,$

en supprimant tous les signes —, on aura la chaîne

$$1, 3, 3, 6 \overset{x}{=} 2, 3, 4, 5 \overset{x}{=} 1, 2, 7, \quad x=2, \quad S_2=54.$$

Formons une chaîne vraie pour $x=1,2,3$, avec $t=8$,

$2, 5, 5, 8, 8, 11, 11, 14 \overset{x}{=} 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13 \overset{x}{=}$
$1, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 15,$
$S_1 = 64, \quad S_2 = 620, \quad S_3 = 6688.$

Remarquons l'identité multiple

$$\underline{3, 4, 5}, \ \underline{11, 12, 13}, \overset{x}{=} 1, 7, 8, 8, 9, 15, \quad (x=1, 2, 3)$$

$S_1 = 48, \ S_2 = 481 = 22^2, \ S_3 = 5472 = 2^5 . 3^2 . 19,$

2 triplets de nombres consécutifs.

En supprimant dans les chaînons les nombres opposés, et en laissant de côté tous les signes —, on obtient une nouvelle chaîne vraie seulement aux degrés pairs $2, 4\ldots, 2n-2, 2n$.

NOTE MATEMATICE

12. — *Bemerkung zur Relation*

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \overset{3}{=} B_1, B_2, B_3, B_4.$$

1. Besteht die Relation

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \overset{3}{=} B_1, B_2, B_3, B_4$$

und setzt man

$$s = \frac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4),$$

dann gilt

$$(A_1 - s), (A_2 - s), (A_3 - s), (A_4 - s) \overset{n}{=}$$
$$(B_1 - s), (B_2 - s), (B_3 - s), (B_4 - s)$$

für $n=1, 3, 5$, wobei die Summe der Basen 0 ergibt.

Numerisches Exempel:

$$2, 14, 36, 40 \overset{3}{=} 0, 22, 26, 44;$$

es ist

$$s = \frac{1}{4}(2 + 14 + 36 + 40) = 23.$$

Wir bekommen die Relation

$$(-21), (-9), 13, 17 \overset{n}{=} (-23), (-1), 3, 21,$$

für $n=1, 3, 5$.

2. Hat die Identität

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \overset{n}{=} B_1, B_2, B_3, B_4$$

für $n=1, 3, 5$, die Form, in welcher die Summe der Basen 0 ergibt, dann gilt auch

$$\begin{cases} (A_1+A_2)^2 + (A_1+A_3)^2 + (A_1+A_4)^2 = \\ (B_1+B_2)^2 + (B_1+B_3)^2 + (B_1+B_4)^2, \\ (A_1+A_2).(A_1+A_3).(A_1+A_4) = \\ (B_1+B_2).(B_1+B_3).(B_1+B_4). \end{cases}$$

Numerisches Exempel:

Das Zahlenbeispiel unter (1) ergibt

$$\begin{cases} (-21-9)^2 + (-21+13)^2 + (-21+17)^2 = \\ (-23-1)^2 + (-23+3)^2 + (-23+21)^2, \\ (-21-9).(-21+13).(-21+17) = \\ (-23-1).(-23+3).(-23+21), \end{cases}$$

also

$$\begin{cases} (-30)^2 + (-8)^2 + (-4)^2 = (-24)^2 + (-20)^2 + (-2)^2 \\ (-30).(-8).(-4) = (-24).(-20).(-2) \end{cases}$$

oder bei Multiplikation mit -1 und Elimination des Faktors 2

$$\begin{cases} 15^2 + 4^2 + 2^2 = 12^2 + 10^2 + 1^2 \\ 15 . 4 . 2 = 12 . 10 . 1. \end{cases}$$

ALFRED MOESSNER
(Nürnberg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLV, No. 2, Octomvrie 1939. Simultaneitate şi ulterioritate, de *T. Vescan*. Asupra unei teoreme a d-lui General *Gh. Buiciiu*, de *D. V. Ionescu*. Dezvoltarea unui polinom întreg în x în raport cu rădăcinele sale, de *D. Georgescu*. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Idem.*, anul XLV Nr. 3, Noemvrie 1939. Impresiile contelui *Samuil Teleki* despre matematicieni străini, de *Victor Marian*. Simultaneitate şi ulterioritate (urmare şi sfârşit), de *T. Vescan*. Egalităţile multigrade, de *M. Ghermănescu*. Raport asupra premiului „*Vasile Conta*", de *O. Onicescu*, *P. Sergescu*, *Cpt. C-dor Gr. Zapan*. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Buletinul Facultăţii de Agronomie din Cluj*, vol. VII, 1938. Conţine articole de specialitate.

4. *Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique*, T. II, F. III—IV, 1939. *Georges Tzitzéica*, par *P. Zervos*. Bemerkung zur Wahrscheinlichkeit nicht unabhänger Ereignisse, von *Hilda Geiringer*. Sur quelques propriétés des lois de probabilité stables, par *Ervin Feldheim*. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur, par *Tiberiu Popoviciu*. Über die Kernfunktion gewisser Reihard'scher Kreiskörper, von *Stefan Bergmann*.

5. *Boletin Matematico*, anul XII, N-rile 12, 13 şi 14, 1939. Buenos-Aires.

6. *Pitagora*, anul V, N-rile 1 şi 2, Octomvrie şi Noemvrie, 1939. Lista membrilor. In al V an. O proprietate a curbelor $y = a x^3 + q$, de *Cezar Coşniţă*. Incadrarea geometriei proective plane în geometria de contact a ciclelor, de *D. Barbilian*. O problemă de înscriere, de *O. N. Ţino*. Asupra unei generalizări a teoremei lui *Aubert*, de *C. Ionescu-Bujor*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

7. *V. Thébault*. Sur des nombres curieux. (Extrait de Mathesis, 1939.)

8. *Th. Angelutza*. Sur une limite des modules des zèros des polynomes. (Note présentée par *M. D. Pompeiu*, à l'Académie Roumaine dans la séance du 28 avril 1939).

9. *Ion Protopopescu*. Supralărgirea şi supraînălţarea căii în curbă. (Extras din Bulletin Scientifique de l'école Polytechnique de Timişoara, Vol. 9, Fasc. 1—2.)

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1748. — *Să se demonstreze că derivata funcţiunii*

$$x - \lg \sqrt[4]{1 - 2\,sp\,x\,cp\,x} + \frac{\operatorname{arctg}(1 - 2\,sp\,x)}{2}$$

este $cp\,x$, *dacă* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ($sp\,x$ *şi* $cp\,x$ *înseamnă sinusul patratic şi cosinusul patratic de* x).

V. ALACI

Soluţie. Funcţiunea dată putându-se scri încă,

$$y = x - \frac{\log(1 - 2\,sp\,x\,cp\,x)}{4} + \frac{\operatorname{arctg}(1 - 2\,sp\,x)}{2},$$

derivând'o şi având în vedere formulele de derivare (45), (50) [„R.M.T.", Vol. XVIII, No. 11, pp. 125-126], corespunzătoare cazului $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, obţinem:

$$(1)\quad y' = 1 + \frac{(cp\,x - sp\,x)(sp^2 x + cp^2 x)}{2(1 - 2\,sp\,x\,cp\,x)} - \frac{sp^2 + cp^2 x}{1 + (1 - 2\,sp\,x)^2}.$$

Dar în virtutea relaţiei fundamentale

$$(2)\qquad sp\,x + cp\,x = 1, \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

(„R. M. T.", vol. XVIII, p. 112),

avem

$$1 - 2\,sp\,x\,cp\,x = (sp\,x + cp\,x)^2 - 2\,sp\,x\,cp\,x = sp^2 x + cp^2 x$$

$$1 + (1 - 2\,sp\,x)^2 = (sp\,x + cp\,x)^2 + (cp\,x - sp\,x)^2 = 2(sp^2 + cp^2 x),$$

astfel că relaţia (1) devine după simplificare

$$y' = 1 + \frac{cp\,x - sp\,x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 + cp\,x - sp\,x}{2} = cp\,x.$$

în virtutea relaţiei (2).

Soluţii date de d-nii: *Borş C.* (prof, Piatra-Neamţ), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Mahrenholtz Johannes* (Germania), *Mioc Vasile* (Inspector şcolar), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Stoenescu D. Mirel*, *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu) şi *Vişa Eugen* (prof. Tg.-Mureş).

Problema 1766. — *Să se determine constanta* k *astfel ca*

$$\frac{sp^3 x + cp^3 x}{2} - \frac{sp^3 x + cp^3 x}{3} = k,$$

având $0 \leq x \leq 90^0$.

V. ALACI

Soluţie. In cazul $0 \leq x \leq 90^0$, avem relaţia fundamentală

$sp\,x + cp\,x = 1$. („R. M. T.", vol. XVIII, p. 111-112),

care ridicată la patrat şi la cub ne dă:

$$sp^2 x + cp^2 x = 1 - 2\,sp\,x\,cp\,x,$$

$$sp^3 x + cp^3 x = 1 - 3\,sp\,x\,cp\,x\,(sp\,x + cp\,x) = 1 - 3\,sp\,x\,cp\,x.$$

In virtutea acestor relaţii, expresia dată pe care s'o notăm cu E, devine:

$$E = \frac{1 - 2\,sp\,x\,cp\,x}{2} - \frac{1 - 3\,sp\,x\,cp\,x}{3} = k.$$

Simplificând, găsim:

$$k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Soluţii date de d-nii: *Borş C.* (prof., Piatra-Neamţ), *Cherţman S. M.* (lic. Giurgiu), *Jidanu I. C-tin* (Şc Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Germania), *Mioc Vasile* (Inspector şcolar), *Mihoc N. Ovidiu* (bacalaureat), *Popovici Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Săruleşteanu Emanoil* (Bucureşti), *Văduva Fl. Marin* (lic. Giurgiu) şi *Vişa Eugen* (profesor, Tg-Mureş).

Altă soluţie. k fiind o constantă oricare ar fi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, luând de exemplu $x = 0$, găsim imediat:

$$k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Observare. D-l *Cherţman S. M.* (lic. Giurgiu), a arătat că expresiunea mai generală

$$\frac{sp^2 x + cp^2 x}{2} \mp \frac{sp^3 x \pm cp^3 x}{3}$$

ia tot valoarea constantă $\frac{1}{6}$, când x este în cadranele I, II, III, IV sau în acelea congruente lor cu 2π, dacă se ia acolo unde avem dublu semn, respectiv perechile de semne: $-+$; $--$; $++$; $+-$.

Problema 1791. — *Dacă x este unul din unghiurile ascuţite ale unui triunghiu dreptunghic, să se demonstreze relaţia:*

$$sp \frac{x}{2} = \frac{\sin 3x}{1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \sin 3x + \cos 3x}.$$

V. ALACI

Soluţie. In virtutea relaţiilor cunoscute

(1) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin 3x = \sin x (3 - 4\sin^2 x)$,

$$\cos 3x = \cos x (1 - 4\sin^2 x),$$

numitorul din membru al 2-lea al relaţiei date, se poate scri succesiv:

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \sin 3x + \cos 3x =$$

$$1 + 2\cos x + 2 - 4\sin^2 x + \sin x (3 - 4\sin^2 x) +$$

$$\cos x (1 - 4\sin^2 x) = 3 - 4\sin^2 x + \sin x (3 - 4\sin^2 x) +$$

$$\cos x (3 - 4\sin^2 x) = (3 - 4\sin^2 x)(1 + \sin x + \cos x).$$

Ţinând seamă de această identitate şi de a 2-a relaţie din (1), membrul al 2-lea al relaţiei din enunţ pe care să'l notăm cu E, devine

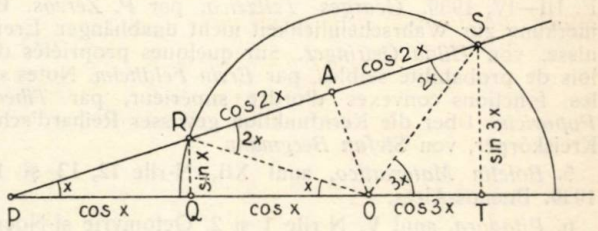
$$E = \frac{\sin x (3 - 4\sin^2 x)}{(3 - 4\sin^2 x)(1 + \sin x + \cos x)} =$$

$$\frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} = sp \frac{x}{2},$$

ultima egalitate având loc conform relaţiei (2), (*Trigonometria patratică*, „R. M. T“, vol. XVIII, No. 2, p. 17).

Soluţii analoage date d-ra, *Papadopol Demetra* (lic. de fete, Băcău), de d-nii *Borş C.* (prof. Piatra-Neamţ) şi *Vişa Eugen* (prof., Tg-Mureş).

Soluţie geometrică. Relevăm întâi faptul cunoscut că, *în orice triunghiu dreptunghic cu ipotenuza egală cu 1, o catetă este sinusul unghiului opus sau cosinusul unghiului alăturat.*



Aşa fiind, construim triunghiul dreptunghic P Q R având:

$$PR = 1, \quad \sphericalangle QPR = x.$$

Din R cu o rază egală cu $PR = 1$, ducem un arc de cerc care să taie prelungirea lui P Q în O, apoi din O ca centru cu $OR = 1$ ca rază descrim un semicerc, care întâlneşte în S prelungirea lui P R. Mai ducem O A perpendiculară pe R S, iar R Q, S T perpendiculare pe P O. Observând figura, putem scri:

$$\sphericalangle QOR = \sphericalangle QPR = x, \quad \sphericalangle ORS = \sphericalangle OSR = 2x,$$

$$\sphericalangle SOT = 3x;$$

(1) $PQ = QO = \cos x$, $AR = AS = \cos 2x$,

$$OT = \cos 3x, \quad TS = \sin 3x.$$

Acum considerăm triunghiul dreptunghic P T S şi aplicăm teorema fundamentală de la triunghiurile dreptunghice, anume: *Intr'un triunghiu dreptunghic, o catetă este egală cu perimetru înmulţit cu sinusul patratic al jumătăţii unghiului opus.* (*Trigonometria patratică*, „R. M. T.“, vol. XVIII, No. 12, p. 139).

In virtutea acestei teoreme, în triunghiul dreptunghic P T S, avem:

(2) $$TS = (PT + PS + TS)\, sp \frac{x}{2}.$$

Dar din figură şi din relaţiile (1), deducem

$$T S = \sin 3x,$$

$$P T = P Q + Q O + O T = 2\cos x + \cos 3x,$$

$$P S = 1 + 2\cos 2x,$$

astfel că relaţia (2) devine,

$$\sin 3x = (2\cos x + \cos 3x + 1 + 2\cos 2x + \sin 3x)\, sp\frac{x}{2},$$

de unde,

$$sp\frac{x}{2} = \frac{\sin 3x}{1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \sin 3x + \cos 3x},$$

tocmai relaţia cerută.

Problema 1800. — *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\, sp\,\theta + b\, cp\,\theta \\ y = c\, sp\,\theta + d\, cp\,\theta. \end{cases}$$

Să se determine unghiul θ corespunzător unui punct P *al configuraţiei şi invers.*

V. Alaci

Soluţie. Configuraţia cerută este simetrică faţă de origină, fiindcă înlocuind θ prin $\pi + \theta$, x şi y păstrează aceleaşi valori, însă cu semne schimbate, conform relaţiilor (3). [*Trigonometria patratică*, „R. M. T.“, vol. XVIII, p. 111].

Vom construi dar configuraţia (1) pentru $0 \leq \theta \leq \pi$ şi o vom întregi cu simetrica sa faţă de origină.

Notăm $a d - b c = \delta$ şi considerăm următoarele două cazuri:

1°. *Cazul* $\delta \neq 0$. In acest caz, din (1) deducem:

$$(2)\qquad sp\,\theta = \frac{d x - b y}{\delta}, \qquad cp\,\theta = \frac{a y - c x}{\delta}.$$

Adunăm şi scădem aceste relaţii după cum avem respectiv $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, sau $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ şi obţinem în membrul întâi 1, în ambele cazuri conform relaţiei (4) şi a primei dintre relaţiile (4′). [*Trigonometria patratică*, „R. M. T.“, vol. XVIII, p. 112], iar pe de altă parte observăm din (1), care sunt valorile minime şi maxime între care rămân cuprinsi x şi y, când $0 \leq \theta \leq \pi$. Rezumăm în următorul tablou rezultatele astfel obţinute:

θ	Inegalităţi.	Ecuaţia	Observare.
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$	$(d-c)x - (b-a)y = \delta$	Ecuaţiile şi Inegalităţile din dreptul lor au loc simultan.
$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$	$\begin{cases} -b \leq x \leq a \\ -d \leq y \leq c \end{cases}$	$(d+c)x - (b+a)y = \delta$	

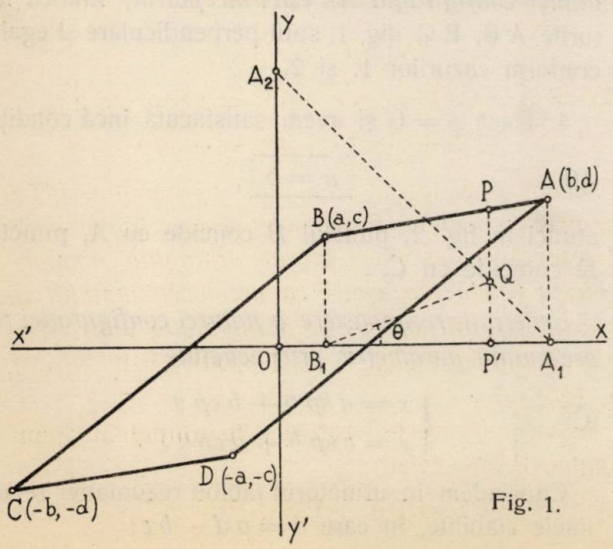


Fig. 1.

Am presupus, $0 \leq a < b$, $0 \leq c < d$.

Pentru a traduce grafic rezultatele cuprinse în acest tablou, construim dreptele

$$(3)\qquad \begin{cases} (d-c)x - (b-a)y = \delta \\ (d+c)x - (b+a)y = \delta, \end{cases}$$

care trec prin punctul $B(a, c)$ (fig. 1), cum se verifică uşor şi reţinem din aceste drepte numai segmentele BA şi BC, [unde $A(b, d)$, $C(-b, -d)$], ale căror puncte, singure, satisfac inegalităţilor din tablou.

Intregind conturul liniar ABC astfel obţinut, cu simetricul său faţă de origină, obţinem paralelogramul ABCD. Putem deci afirma, în acest caz:

Configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile (1) *este paralelogramul* ABCD, *cu centru în*

origină şi vârfurile fixate prin coordonatele, scrise în figură.

2°. *Cazul* $\delta = 0$. In acest caz avem,

$$(4)\qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} = k, \quad \text{sau:} \quad \frac{d-c}{b-a} = \frac{d+c}{b+c} = k$$

şi deci ecuaţiile (3), ambele, se reduc după simplificare, la

$$(5)\qquad y = k\,x,$$

ecuaţie care s'ar fi dedus cu uşurinţă şi din (2).

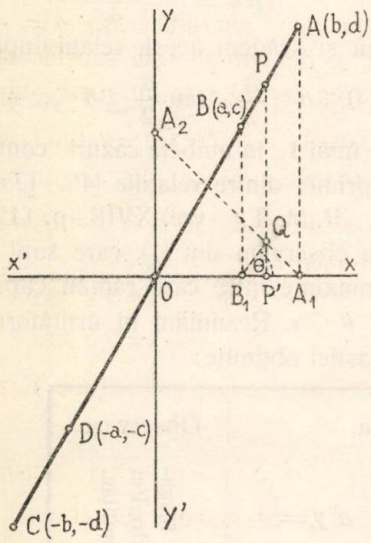


Fig. 2.

Vom construi deci drepta (5), care trece prin origină, şi vom reţine din ea, pentru a satisface inegalităţilor din tablou, numai segmentele B A şi B C, (fig. 2). Intregim apoi această configuraţie cu simetrica ei, formată din segmentele colineare lor respectiv D C, D A.

Ţinem să relevăm acest caz important, $\delta = 0$. *El ne permite a afirma că: Configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile*

$$(6)\qquad \begin{cases} x = a\,sp\,\theta + b\,cp\,\theta, \\ y = k\,(a\,sp\,\theta + b\,cp\,\theta) \end{cases}, \quad \text{[cum reiasă din (4)],}$$

reprezintă segmentul de dreaptă A C, *ce îşi are mijlocul în origină.*

Acest segment este format, cum am văzut, din segmentele parţiale A B, B C, C D, D A şi s'ar putea deduce prin deformarea figurei 1, în aşa fel, ca laturile A B, B C şi C D, D A să vie în prelungire.

In particular, pentru $k = 1$, segmentul A C este aşezat pe bisectoarea unghiului axelor din primul cadran.

Câteva cazuri particulare interesante.

1. Dacă $\delta \neq 0$ şi avem încă satisfăcută condiţia

$$(7)\qquad \boxed{a^2 + c^2 = b^2 + d^2},$$

atunci configuraţia (1) *este un dreptunghiu,* fiindcă condiţia (7) este echivalentă cu relaţia

$$\frac{d-c}{b-a} = -\frac{b+a}{d+c},$$

care scrie că dreptele din (3), pe care se află laturile A B, B C (fig. 1), sunt perpendiculare.

2. Dacă $\delta \neq 0$ şi avem încă satisfăcută condiţia

$$(8)\qquad \boxed{a\,b + c\,d = 0},$$

atunci configuraţia (1) *este un romb,* fiindcă condiţia (8) este echivalentă cu relaţia

$$(b-a)^2 + (d-c)^2 = (a+b)^2 + (c+d)^2,$$

care scrie că laturile A B, B C (fig. 1), sunt egale.

3. Dacă $\delta \neq 0$ şi avem satisfăcute simultan condiţiile

$$(9)\qquad \boxed{\begin{array}{c} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ a\,b + c\,d = 0 \end{array}},$$

atunci configuraţia (1) *este un patrat,* fiindcă laturile A B, B C (fig. 1) sunt perpendiculare şi egale conform cazurilor 1. şi 2.

4. Dacă $\delta = 0$ şi avem satisfăcută încă condiţia

$$(10)\qquad \boxed{a = b},$$

atunci în fig 2, punctul B concide cu A, punctul D coincide cu C.

Criterii de recunoaştere a naturei configuraţiei reprezentată parametric prin ecuaţiile

$$(C)\qquad \begin{cases} x = a\,sp\,\theta + b\,cp\,\theta \\ y = c\,sp\,\theta + d\,cp\,\theta \end{cases}.$$

Cuprindem în următorul tablou rezumativ, rezultatele stabilite, în care $\delta = a\,d - b\,c$:

Dacă	Condiţii satisfăcute.	Natura configuraţiei (C).
$\delta \neq 0$, şi:	1. a,b,c,d, independenţi	paralelogram
	2. $a^2+c^2=b^2+d^2$	dreptunghiu
	3. $ab+cd=0$	romb
	4. $\begin{cases} a^2+c^2=b^2+d^2 \\ ab+cd=0 \end{cases}$	patrat
$\delta=0$, şi:	5. a, b, c, d numai satisfac nici o altă condiţie	Un segment de dreaptă ABCD, ce trece prin origină, fig. 2.
	6. $a=b$	Un segment analog celui precedent, în care segmentele parţiale AB, CD sunt nule.

In toate cazurile, vârfurile A, B, C, D au coordonatele:

$$A(b, d),\ B(a, c),\quad C(-b, -d),\quad D(-a, -c).$$

Exemple. In lucrarea mea *„Trigonometria patratică“*, în capitolul: *Configuraţii liniare reprezentate parametric* („R. M. T.“, vol. XIX, pp. 84—94), am tratat detailat câteva probleme, în care se cerea natura unor configuraţii de forma (C).

Vom relua unele din aceste probleme, sub numărul ce l'au avut şi le vom soluţiona foarte simplu, folosind acum criteriile din tabloul de mai sus:

161. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x = a\,cp\,\theta \\ y = a\,sp\,\theta. \end{cases} \qquad (a > 0).$$

Soluţie. Scriind acest sistem sub forma (C), anume

$$\begin{cases} x = 0\,sp\,\theta + a\,cp\,\theta \\ y = a\,sp\,\theta + 0\,cp\,\theta, \end{cases}$$

observăm că coeficienţii din (C), aci sunt respectiv

$$a = 0,\quad b = a,\quad c = a,\quad d = 0.$$

Vedem cu uşurinţă că, $\delta \neq -a^2 \neq 0$ şi condiţiile 4. din tablou sunt satisfăcute.

Rezultă că, *configuraţia cerută este un patrat*, cu vârfurile

$$A(a, 0),\quad B(0, a),\quad C(-a, 0),\quad D(0, -a),$$

situate pe axe.

162. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x = a\,cp\,\theta \\ y = b\,sp\,\theta \end{cases} \qquad (a > b > 0).$$

Soluţie. Scriind acest sistem sub forma (C), anume

$$\begin{cases} x = 0\,sp\,\theta + a\,cp\,\theta \\ y = b\,sp\,\theta + 0\,sp\,\theta \end{cases}$$

observăm că, coeficienţii din (C), aci sunt respectiv:

$$a = 0,\quad b = a,\quad c = b,\quad d = 0.$$

Vedem cu uşurinţă că, $\delta = -ab \neq 0$ şi condiţia 3. din tablou este satisfăcută. Rezultă că, *configuraţia cerută este un romb*, cu vârfurile

$$A(a, 0),\ B(0, b),\ C(-a, 0),\ D(0, -b).$$

situate pe axe.

163. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x + y = 2a\,cp\,\theta \\ x - y = 2a\,sp\,\theta. \end{cases}$$

Soluţie. Scriind acest sistem sub forma (C), anume

$$\begin{cases} x = a\,sp\,\theta + a\,cp\,\theta \\ y = -a\,sp\,\theta + a\,cp\,\theta, \end{cases}$$

observăm că, coeficienţii din (1), aci sunt respectiv

$$a = a,\quad b = a,\quad c = -a,\quad d = a.$$

Observăm cu uşurinţă că, $\delta = 2a^2 \neq 0$ şi condiţiile 4. din tablou sunt satisfăcute. Rezultă că, *configuraţia cerută este un patrat*, cu vârfurile

$$A(a, a),\quad B(a, -a),\quad C(-a, -a),\quad D(-a, a),$$

situate pe bisectoarele unghiurilor axelor.

164. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x = a(sp\,\theta + cp\,\theta) \\ y = b(sp\,\theta - cp\,\theta). \end{cases}$$

Soluţie. Observăm că coeficienţii din (C), aci sunt respectiv:

$$a = a,\quad b = a,\quad c = b,\quad d = -b.$$

Vedem cu uşurinţă că, $\delta = -2ab \neq 0$ şi condiţia 2. din tablou este satisfăcută. Rezultă că, *configuraţia cerută este un dreptunghiu, cu vârfurile:*

$$A(a, -b),\quad B(a, b),\quad C(-a, b),\quad D(-a, -b).$$

165. **Problemă**. *Se cere configuraţia reprezentată parametric astfel:*

$$\begin{cases} x+y=b\sqrt{2}\,sp\,\theta \\ x-y=a\sqrt{2}\,cp\,\theta . \end{cases}$$

Soluţie. Scriind acest sistem sub forma (C), anume

$$\begin{cases} x=\dfrac{b}{\sqrt{2}}\,sp\,\theta+\dfrac{a}{\sqrt{2}}\,cp\,\theta \\ y=\dfrac{b}{\sqrt{2}}\,sp\,\theta-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\,cp\,\theta, \end{cases}$$

observăm că, coeficienţii din (C), aci sunt respectiv:

$$a=\frac{b}{\sqrt{2}},\quad b=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad c=\frac{b}{\sqrt{2}},\quad d=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot$$

Vedem cu uşurinţă că, $\delta=-ab\neq 0$ şi condiţia 3. din tablou este satisfăcută. Rezultă că *configuraţia cerută este un romb,* cu vârfurile

$$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\quad B\left(\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right),$$

$$C\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\quad D\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right),$$

situate pe bisectoarele unghiurilor axelor.

166. **Problemă.** *Se cere configuraţia cu ecuaţiile parametrice:*

$$\begin{cases} x=a\,cp\,\theta \\ x+y=a\,sp\,\theta. \end{cases}$$

Soluţie. Scriind acest sistem sub forma (C), anume

$$\begin{cases} x=0\,sp\,\theta+a\,cp\,\theta \\ y=a\,sp\,\theta-a\,cp\,\theta, \end{cases}$$

observăm că, coeficienţii din (C), aci sunt respectiv:

$$a=0,\quad b=a,\quad c=a,\quad d=-a.$$

Vedem cu uşurinţă că, $\delta=-a^2\neq 0$, dar că nici una din condiţiile 2., 3., 4. din tablou nu este satisfăcută, deci suntem în cazul 1. Rezultă că, *configuraţia cerută este un paralelogram,* cu vârfurile

$$A(a,-a),\quad B(0,a),\quad C(-a,a),\quad D(0,-a),$$

B şi D fiind situate pe axa yy', iar A şi C sunt situate pe a 2-a bisectoare a unghiurilor axelor.

Generalizare. Vom soluţiona următoare problemă mai generală:

Problemă. *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$(11)\qquad \begin{cases} x=\alpha+a\,sp\,\theta+b\,cp\,\theta \\ y=\beta+c\,sp\,\theta+d\,cp\,\theta \end{cases}$$

Soluţie. Fie un sistem rectangular xOy, la care este raportată configuraţia (11). Prin punctul $O_1(\alpha,\beta)$ trasăm un nou sistem de axe XO_1Y paralel cu primul.

Faţă de acest nou sistem, evident că ecuaţiile parametrice ale configuraţiei (11), sunt:

$$(12)\qquad \begin{cases} X=a\,sp\,\theta+b\,cp\,\theta \\ Y=c\,sp\,\theta+d\,cp\,\theta. \end{cases}$$

Am redus astfel problema generală, la cea precedentă, complect studiată.

Configuraţia (11), conform criteriilor de recunoaştere din tabloul de mai sus, poate fi, *paralelogram, romb, patrat* sau chiar *un segment de dreaptă,* cu vârfurile,

$$(13)\qquad \begin{aligned} &A(\alpha+b,\ \beta+d),\quad B(\alpha+a,\ \beta+c), \\ &C(\alpha-b,\ \beta-d),\quad D(\alpha-a,\ \beta-c), \end{aligned}$$

raportate la sistemul de axe xOy.

Ca aplicaţie, să soluţionăm următoarea problemă din *„Trigonometria patratică“,* („R. M. T.“, vol. XIX, p. 90).

167. **Problemă.** *Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:*

$$(14)\qquad \begin{cases} a\,x+b\,y+c=cp\,\theta \\ a_1\,x+b_1\,y+c_1=sp\,\theta \end{cases} \qquad (a\,b_1-a_1\,b\neq 0.$$

Soluţie. Scriind acest sistem sub forma (11), anume

$$(15)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{b\,c_1-b_1\,c}{a\,b_1-a_1\,b}-\dfrac{b}{a\,b_1-a_1\,b}\,sp\,\theta+\dfrac{b_1}{a\,b_1-a_1\,b}\,cp\,\theta \\ y=\dfrac{a_1\,c-a\,c_1}{a\,b_1-a_1\,b}+\dfrac{a}{a\,b_1-a_1\,b}\,sp\,\theta-\dfrac{a_1}{a\,b_1-a_1\,b}\,cp\,\theta, \end{cases}$$

observăm că coeficienţii din (11), aci sunt respectiv:

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha=\dfrac{b\,c_1-b_1\,c}{a\,b_1-a_1\,b},\quad a=\dfrac{-b}{a\,b_1-a_1\,b},\quad b=\dfrac{b_1}{a\,b_1-a_1\,b} \\ \beta=\dfrac{a_1\,c-a\,c_1}{a\,b_1-a_1\,b},\quad c=\dfrac{a}{a\,b_1-a_1\,b},\quad d=\dfrac{a_1}{a\,b_1-a_1\,b}\cdot \end{cases}$$

Rezultă că, configuraţia cerută, este în general, un paralelogram.

Configuraţia (14) poate fi însă şi *dreptunghiu,*

romb, patrat, sau chiar *segment de dreaptă,* dacă coeficienţii lui $sp\,\theta$, $cp\,\theta$ din (15), notaţi cu a, b, c, d, cum se vede din (16), satisfac criteriile corespunzătoare din tabloul stabilit. Vârfurile acestor configuraţii sunt date în (13).

Trecem acum la a 2-a parte a problemei.

Să se determine unghiul θ corespunzător unui punct al configuraţiei (1) *şi invers.*

Vom considera mai multe cazuri:

1°. Fie punctul P situat pe latura A B (figurile 1 şi 2), de coordonate

$$x = O\,P', \quad y = P'\,P.$$

Proectăm pe $O\,x$ în A_1, B_1 punctele A, B şi ducem dreapta auxiliară $A_1\,A_2$ înclinată de 45° pe $O\,x$. Punctul Q de intersecţie al dreptelor $A_1\,A_2$, $P'\,P$ îl unim cu B_1. Afirmăm că,

$$\sphericalangle\, A_1\,B_1\,Q = \theta.$$

In adevăr, în triunghiul dreptunghic $P'\,B_1\,Q$, *teorema 1-a* din *„Trigonometria patratică“* [„R.M.T. vol. XVIII, p. 138], ne permite a scri

$$B_1\,P' = (B_1\,P' + P'\,Q)\,cp\,\theta = B_1\,A_1\,cp\,\theta,$$

sau:

$$x - a = (b - a)\,cp\,\theta.$$

De aci deducem ţinând seamă că, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ şi deci $sp\,\theta + cp\,\theta = 1$:

$$x = a\,(1 - cp\,\theta) + b\,cp\,\theta = a\,sp\,\theta + b\,cp\,\theta.$$

Această relaţie fiind prima din relaţiile (1), invederează că θ a fost bine determinat.

Invers. Dacă se dă $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, punctul P corespunzător configuraţiei (1) se află astfel: Prin B_1 ducem o dreaptă înclinată pe $O\,x$ de unghiul θ dat şi fie Q intersecţia ei cu $A_1\,A_2$. Ridicăm prin Q perpendiculara $Q\,P'$ pe $O\,x$ şi ea va întâlni latura A B în punctul cerut P.

2°. Dacă P este situat pe latura B C, unghiul $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ corespunzător, se află astfel:

Punem

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_1, \qquad \left(0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

şi prima relaţie din (1) devine, având în vedere că, $sp\,\theta_1 + cp\,\theta_1 = 1$,

$$(17) \qquad x = a\,cp\,\theta_1 - b\,sp\,\theta_1 = a - (a + b)\,sp\,\theta,$$

sau

$$(18) \qquad a - x = [(a - x) + (b + x)]\,sp\,\theta_1,$$

unde x este cunoscut din figură şi cum ştim, $-b \leq x \leq a$.

Vom construim acum un triunghiu dreptunghic de catete $a - x$, $b + x$, cunoscute şi unghiul opus catetei $a - x$, este θ_1, în virtutea *teoremei 1-a* din *„Trigonometria patratică“* [„R. M. T.“, vol XVIII, p. 138], care justifică relaţia (18). θ_1 aflat, avem şi pe θ.

Invers. Dacă se dă $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, punctul P corespunzător configuraţiei (1), este determinat de absciza x ce se obţine de (17).

3°. Dacă P este situat pe latura C D, unghiul $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{3}$ corespunzător, se află astfel: Luăm simetricul lui P faţă de origină, care va fi situat pe A B, aflăm unghiul θ_1 corespunzător, cum am văzut la punctul 1° şi atunci

$$\theta = \pi + \theta_1,$$

este unghiul cerut.

Invers. Dacă se dă $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, punctul P corespunzător configuraţiei (1), se află astfel: Se determină punctul P, corespunzător unghiului

$$\theta_1 = \theta - \pi, \qquad \left(0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

cum am văzut la punctul 1°, şi simetricul său faţă de origină, este punctul căutat P.

4°. Dacă P este situat pe latura D A, unghiul $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ corespnnzător, se află astfel: Luăm simetricul lui P faţă de origină, situat evident pe B C, aflăm unghiul θ, corespunzător, ca la punctul 2° şi atunci

$$\theta = \pi + \theta_1,$$

este unghiul cerut.

Invers. Dacă se dă $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, Punctul P corespunzător configuraţiei (1), se află astfel: Se determină punctul P_1 corespunzător unghiului

$$\theta_1 = \theta - \pi, \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \pi\right),$$

cum am văzut la punctul 2° şi simetricul său faţă de origină, este punctul căutat P.

S'a primit o foarte bună soluţie de la d-l profesor *C. Borş* (Piatra Neamţ). D-sa a studiat însă numai cazul $\delta \neq 0$, fără nici o discuţie şi a determinat unghiul θ corespunzător unui punct P al configuraţiei (1) şi invers, numai în cazul când P ar fi situat pe latura A B.

PROBLEME PROPUSE

1801. — Să se găsească soluţiile sistemului diofantian:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3y_1y_2y_3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 = u^3.$$

A. GLODEN

1802. Să se dea în numere întregi, soluţia generală a sistemului:

$$\begin{cases} a+b+c = d+e+f \\ a^2+b^2+c^2 = d^2+e^2+f^2 \\ -(a.b.c) = d.e.f. \end{cases}$$

Exemplu:

$$2+4+15 = (-1)+10+12$$
$$2^2+4^2+15^2 = (-1)^2+10^2+12^2$$
$$-(2.4.15) = (-1).10.12.$$

A. MOESSNER

1803. — Să se studieze variaţia funcţiunei

$$y = \log|x-1| + \frac{2x-3}{x-1}$$

şi să i se facă graficul, logaritmul având baza e, iar bazele însemnând valoarea absolută. Să se deducă de aci numărul rădăcinelor reale ale ecuaţiei

$$\frac{2x-3}{x-1} = \log\frac{a}{x-1},$$

a fiind un parametru real.

GH. TH. GHEORGHIU

1804. — O dreaptă variabilă trecând printr'un punct fix C, taie laturile unghiului dat A O B, în punctele D şi E.

1°. Să se afle locul descris de centrul cercului circumscris triunghiului O D E.

2°. Presupunând că C este pe bisectoarea interioară a unghiului A O B, să se afle locul polului dreptei D E în raport cu cercul O D E.

N. ABRAMESCU

1805. — Să se determine poziţia punctului M în planul triunghiului A B C, astfel ca să avem relaţia

1°. aria A M C = k aria C M B,

sau relaţiile:

2°. aria A M C = k_1 aria B M A = k_2 aria C M B.

I. V. MATIES

1806. — Se dă dreapta:

(D) $\qquad y = \lambda.$

Să se găsească curba Γ, care o admite ca podară şi să se găsească curbele Γ_1, cari au aceiaşi sub-normală ca $\Gamma(\lambda = 1)$. Care este condiţia ca Γ_1, să aibă origina nod propriu zis?

MIHAIL ST. BOTEZ

1807. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{arc\,cotg}\frac{a}{x} + \arccos(x-a) = \frac{3\pi}{4}.$$

Pentru ce valori ale lui a avem rădăcini reale?

MARIN F. VADUVA

1808. — Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x+y+1 = sp\,\theta \\ x-y = cp\,\theta. \end{cases}$$

Să se determine unghiul θ corespunzător unui punct P al configuraţiei şi invers.

V. ALACI

ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA

Candidaţii reuşiţi la examenul de admitere în anul preparator, în ordinea clasificaţiei.

(Anul şcolar 1939—1940)

1. *Stănculescu M. Ovidiu*, Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
2. *Jidanu I. Constantin*, Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
3. *Caraman T. Aurel*, Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
4. *Maroş E. Desideriu*, Lic. de Stat, Petroşani.
5. *Golumbovici V. I. Cornel*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
6. *Trăilescu V. Stănică*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
7. *Draganov H. Boris*, Lic. Ştefan cel Mare, Tighina.
8. *Lanevschi P. Anatolie*, Lic. Vasile Lupu, Orheiu.
9. *Evdoşenco P. Arcadie*, Lic. B. P. Haşdeu, Chişinău.
10. *Marcenco P. Nicoïae*, Lic. M Voevod Mihai, Cetatea-Albă.
11. *Mureşan I. Octavian*, Lic. Moise Nicoară, Arad.
12. *Sorian I. Oscar*, Lic. Cor. Bredicianu, Lugoj.
13. *Stavrescu G. Grigore*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
14. *Todoran Gh. Gherghe*, Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
15. *Bululete V. Alexandru*, Lic. Traian, Turnu-Severin.
16. *Constantinescu A. C-tin*, Lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
17. *Demian I. Ionel Viorel*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
18. *Keller V. Gheorghe*, Lic. Banaţia, Timişoara.
19. *Munteanu D. Ionel*, Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
20. *Bejenaru Gh. Victor*, Lic. Mihai Viteazul, Tg-Mureş.
21. *Cristeţiu P. Nicolae*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
22. *Munteanu V. Horea*, Lic. Samuil Vulcan, Beiuş
23. *Anton A. Ştefan*, Lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.
24. *Molnar C. Clara Reca*, Lic. Carmen Sylva, Timişoara.
25. *Bocsanczy I. Ioan*, Lic. Andrei Mureşan, Dej.
26. *Evuţian S. Gelu*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
27. *Bun I. Gheorghe*, Lic. de Stat, Petroşani.
28. *Mihoc N. Ovidiu*, Lic. Moise Nicoară, Arad.
29. *Mioc A. Damaschin*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
30. *Kovats Şt. Ştefan*, Lic. Unitarian, Cluj.
31. *Corlăţan St. Liviu*, Lic. Dragoş Vodă, Câmpulung. Mold.
32. *Dima I. Mircea*, Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
33. *Botezatu C. Radu*, Sem. Pedag. Univers., Iaşi.
34. *Doczi M. Iuliu*, Lic. Mitrop. Silvestru, Cernăuţi.
35. *Draganov H. Gleb*, Lic. Ştefan cel Mare, Tighina.
36. *Patachi E. Nicolae*, Lic. Andrei Mureşan, Dej.
37. *Bojin I. Stelian*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
38. *Ardelean V. Alexiu*, Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
39. *Constantin I. Toma*, Lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
40. *Florea V. Inocenţiu*, Lic. Radu Negru, Făgăraş.
41. *Gherman D. Mircea*, Lic. Mitrop. Silvestru, Cernăuţi.
42. *Mineu G. Ioan*, Lic. Vasile Lucaci, Carei.
43. *Bălan T. Virgil*, Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
44. *Popovici I. Nicoară*, Lic. B. P. Haşdeu, Chişinău.
45. *Tomescu C. Nicolae-Dan*, Lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
46. *Aramă V. Cezar*, Lic. C. Negruzzi, Iaşi.
47. *Pivavarov E. Anatolie*, Lic. Alecu Russo, Chişinău.
48. *David A. Iuliu Alex.*, Lic. Gheorghe Barițiu, Cluj.
49. *Macri Gh. Eugeniu*, Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
50. *Olah Francisc*, Lic. Dr. I. Meşota, Braşov.
51. *Sădeanu C. Emilian*, Lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.
52. *Solomon S. Traian*, Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu.
53. *Alamanos P. Eugeniu*, Lic Nicolae Bălcescu, Brăila.
54. *Lupescu I. Alexandru*, Lic. Ferdinand I, Bacău.
55. *Marinescu G. D-tru Cezar*, Lic. Nicolae Bălcescu, Brăla.
56. *Fodor T. Traian*, Lic. Gheorghe Barițiu, Cluj.
57. *Hotico V. Dumitru*, Coleg. Naţ. Sft. Sava, Bucureşti.
58. *Tarcea Gh. Gheorghe*, Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu.
59. *Borneas L. Marius*, Lic. Moise Nicoară, Arad.
60. Mallász A. Otto, Lic. Decebal, Deva.
61. *Bacsik E. Aloisiu*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
62. *Balog I. Cornel*, Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
63. *Oprean N. Romul*, Lic. Aurel Vlaicu, Orăştie.
64. *Mitric V. Gheorghe*, Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
65. *Munteanu-Râmnic D. Basarab*, Lic. Sf-ţii Petru şi Pavel, Ploeşti.
66. *Popa I. Olimpiu*, Lic. Gheorghe Barițiu, Cluj.
67. *Popescu T. Teodor*, Semin. Pedag. Univers., Cluj.
68. *Sălegean I. Alexandru*, Lic. Alex. Papiu Ilarion, Tg.-Mureş.
69. *Sandru I. Ioan*, Lic. Radu Negru, Făgăraş.
70. *Timaru Gh. Gheorghe*, Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
71. *Cioban L. Boris*, Lic. Tehnic Agricol, Soroca.
72. *Vas I. Francisc*, Lic. Andrei Mureşan, Dej.
73. *Popovici C. Mircea*, Lic Coriolan Bredicianu, Lugoj.
74. *Sztancsa I. Ştefan*, Lic. Piarist, Timişoara.
75. *Tokay I. Iuliu*, Lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.
76. *Tompa L. Aiexandru*, Lic St. Octavian Iosif, Odorheiu.
77. *Bârsan I. Octavian*, Lic. Radu Negru, Făgăraş.
78. *Benke M. Martin*, Lic. Andrei Mureşan, Dej.
79. *Năcuţă Gh. Constantin*, Lic. Ferdinand I, Bacău.
80. *Pleşia I. Ion*, Lic. Regele Ferdinand I, Turda.
81. *Popp L. Ladislau*, Lic. Dragoş Vodă, Sighet.
82. *Sandru V. Aurel*, Lic. de Stat, Petroşani.
83. *Buţiu I. Ioan*, Lic. Sft. Vasile, Blaj.
84. *Caparencu Vi. C-tin*, Lic. Ioan Creangă, Bălţi.
85. *Curiţa I. Iosif*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
86. *Gallery C. Ioan*, Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
87. *Nanu A. Aurel*, Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu.
88. *Orăşanu M. Mihai*, Lic. Gheorghe Şincai, Bucureşti.
89. *Şuboni I. Cornel*, Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
90. *Bethlendi F. Gheorghe*, Lic. reformat băeţi, Cluj.
91. *Frâncu St. Eugen*, Lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu.
92. *Kaflikiewicz F. Alex*, Lic. Ştefan Lud. Roth, Mediaş.
93. *Mâldov M. Leonid*, Lic. Regele Carol II, Bolgrad.
94. *Müller E. Emilian*, Lic. Radu Negru, Făgăraş.
95. *Popovici Gh. Gheorghe*, Lic. Cor. Bredicianu, Lugoj.
96. *Bârbos St. Adrian*, Lic. Gheorghe Barițiu, Cluj.
97. *Csiszer A. Pavel*, Lic. rom. cat, Cluj.
98. *Iovin S. Savu*, Lic. Moise Nicoară, Arad.
99. *Morariu D. Dragoş*, Lic. Dragoş Vodă, Câmpulung.-Mold.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Aman V. C-tin (P., 1614, 1625, 1626, 1634, 1635, 1638, 1640, 1650, 1652, 1663, 1674, 1678, 1687); *Atanase Petrache* (1683); *Bakonyi C.* (1386, 1389, 1405, 1413, 1438, 1447, 1496); *Bădea Crum* (1683); *Bărlea V. Suhăţean* (1729, 1757); *Becu Crum* (1683); *Borneaş Marius* (1688, 1689, 1696, 1720, 1734, 1768, 1777); *Brădeanu Nicolae* (1655, 1674, 1681, 1688, 1690, 1696, 1697, 1699, 1703, 1729, 1735, 1746, 1751, 1777, 1783); *Calciu F. Ghenadi* (1746, 1786); *Caraiani Iancu* (1674, 1684, 1746, 1786); *Chintescu M. Matei* (1752, 1777); *Cristea I. Nicolae* (P., 1582, 1583, 1590, 1614, 1640, 1648, 1700, 1741, 1763, 1774); *Damian Ştefan* (1794); *Damianof Ştefan* (1674, 1681, 1786), *Damianov Damian* (1674, 1681, 1746, 1760, 1786); *Diaconescu Marcel* (1785, 1787); *Doscan Gh. Alexandru* (1631, 1697, 1704, 1746, 1777, 1785); *Fotty Vasile* (1683); *Gligor N Ioan* (1664, 1703, 1718, 1741, 1763, 1777, 1778, 1785, 1794, 1799); *Goga Florian* (1756, 1783, 1786, 1797, 1791, 1799); *Lioliu Constantin* (1683); *Logofătu M. Ioan* (1402, 1654, 1655, 1674, 1679, 1681, 1688, 1690, 1699, 1703, 1729, 1745, 1746, 1751, 1760, 1776, 1777); *Luca I. Ioan* (1727, 1757, 1758, 1763, 1765, 1773, 1777, 1785, 1799); *Lucovici Bronislav* (1674, 1681, 1684, 1760); *Mărgărit I. Nicolae* (1753, 1757, 1785, 1786, 1787); *Mihu Cerchez* (P); *Mocanu I. C-tin* (1664, 1665, 1681, 1684, 1687, 1688, 1692, 1693, 1696, 1697, 1699, 1708, 1727, 1734, 1735, 1746, 1751, 1757, 1765, 1774, 1777, 1783, 1785); *Moldovan C.* (1697, 1699, 1729); *Mureşan I. C-tin* (1699, 1716, 1754, 1777, 1787); *Musta Ştefan* (P.); *Neumann Maria* (P.); *Nicola Gheorghe* (1684, 1794); *Pătruţă Chiril* (1681, 1760); *Peltechi Mihai* (1674, 1681, 1720, 1752, 1760); *Popàrdan Velizar* (1684, 1794); *Popescu N. Corneliu* (P., 1478, 1547, 1745, 1751, 1793, 1794, 1799); *Popovici Mircea* (1664, 1681, 1682, 1688, 1696, 1699, 1704, 1729, 1774, 1775, 1788, 1799, 1783, 1785); *Săndulică R.* (1746); *Schapira Salo* (1696, 1753, 1760, 1776, 1777); *Şerban I. C-tin* (1691, 1696, 1701, 1777, 1778); *Sorian Oscar* (P., 1622, 1768, 1777, 1778); *Stamate I. Ionel* (P., 1626, 1734, 1797), *Tilică C. Ştefan* (N., 1710, 1737, 1741, 1745, 1746, 1751, 1763, 1765, 1768, 1776, 1777, 1778, 1783, 1784, 1785, 1790, 1799); *Ţane Gheorghe* (1683); *Ţarălungă Gh. Savel* (1792); *Văduva F. Marin* (1698, 1700); *Vijelie Gh. Eugen* (1757, 1760, 1763, 1773, 1774, 1775, 1777, 1779, 1794, 1799).

INFORMAŢIUNI

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XVIII, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

DE

V. ALACI

PROFESOR

TABELE

conţinând logaritmii *sinusului* şi *cosinusului patratic* ale arcelor cuprinse între 0^0 şi 90^0, din minut în minut.

(cu cinci zecimale).

Lămuriri.

Aceste tabele au fost calculate cu ajutorul formulelor (16) şi (17) (No. 19, P. I[a]), anume:

$$\log sp\,\alpha = \log \sin \alpha - \log \sin (45^0 + \alpha) - \frac{\log 2}{2}$$

$$\log cp\,\alpha = \log \cos \alpha - \log \cos (45^0 + \alpha) - \frac{\log 2}{2}\,.$$

Modul de folosire a acestor tabele, pentru

1°. *Aflarea logaritmului sinusului şi cosinusului patratic a unui arc dat;*

2°. *Aflarea arcului corespunzător unui logaritm dat, a unui sinus sau cosinus patratic,*

este identic acelui din *„Trigonometria circulară“*.

Observare. Am verificat aceste tabele cu ajutorul studenţilor din anul I. a Şcoalei Politechnice din Timişoara (1938—1939), cărora la aduc vii mulţumiri.

0°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$-\infty$		0,00000		**60**
1	$\bar{4}$,46361	30090	$\bar{1}$,99988	12	59
2	76451	17597	9975	13	58
3	94048	12481	9963	12	57
4	$\bar{3}$,06529	9678	9950	13	56
5	16207	7906	9937	13	55
6	24113	6681	9925	12	54
7	30794	5788	9912	13	53
8	36582	5102	9900	12	52
9	41684	4564	9887	13	51
10	46248	4126	9875	12	**50**
11	50374	3766	9862	13	49
12	54140	3464	9849	13	48
13	57604	3205	9837	12	47
14	60809	2985	9824	13	46
15	63794	2789	9812	12	45
16	66583	2621	9799	13	44
17	69204	2470	9786	13	43
18	71674	2336	9773	13	42
19	74010	2214	9761	12	41
20	76224	2107	9748	13	**40**
21	78331	2008	9736	12	39
22	80339	1918	9723	13	38
23	82257	1835	9711	12	37
24	84092	1761	9698	13	36
25	85853	1692	9686	12	35
26	87545	1626	9674	12	34
27	89171	1567	9661	13	33
28	90738	1511	9649	12	32
29	92249	1460	9635	14	31
30	93709	1411	9623	12	**30**
31	95120	1367	9610	13	29
32	96487	1324	9598	12	28
33	97811	1284	9586	12	27
34	99095	1247	9573	13	26
35	$\bar{2}$,00342	1210	9561	12	25
36	01552	1178	9548	13	24
37	02730	1146	9535	13	23
38	03876	1115	9523	12	22
39	04991	1088	9510	13	21
40	06079	1060	9498	12	**20**
41	07139	1033	9486	12	19
42	08172	1010	9473	13	18
43	09182	987	9461	12	17
44	10169	963	9448	13	16
45	11132	942	9435	13	15
46	12074	922	9423	12	14
47	12996	901	9411	12	13
48	13897	884	9398	13	12
49	14781	865	9386	12	11
50	15646	848	9373	13	**10**
51	16494	830	9361	12	9
52	17324	815	9348	13	8
53	18139	800	9336	12	7
54	18939	785	9324	12	6
55	19724	769	9311	13	5
56	20493	757	9298	13	4
57	21250	743	9286	12	3
58	21993	731	9274	12	2
59	22724	718	9262	12	1
60	23442		9249	13	**0**
′	cp.		sp.		′

89°

1°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{2}$,23442	704	$\bar{1}$,99249	13	**60**
1	24146	694	99236	12	59
2	24840	683	99224	12	58
3	25523	672	99212	13	57
4	26195	661	99199	12	56
5	26856	651	9187	12	55
6	27507	640	9175	13	54
7	28147	632	9162	12	53
8	28779	622	9150	13	52
9	29401	612	9137	12	51
10	30013	604	9125	12	**50**
11	30617	596	9113	13	49
12	31213	587	9100	12	48
13	31800	577	9088	13	47
14	32377	571	9075	12	46
15	32948	563	9063	13	45
16	33511	556	9050	12	44
17	34067	548	9038	12	43
18	34615	541	9026	12	42
19	35156	535	9014	13	41
20	35691	527	9001	12	**40**
21	36218	521	8989	12	39
22	36739	514	8977	13	38
23	37253	508	8964	12	37
24	37761	502	8952	12	36
25	38263	496	8940	13	35
26	38759	490	8927	12	34
27	39249	484	8915	12	33
28	39733	479	8903	13	32
29	40212	473	8890	12	31
30	40685	468	8878	12	**30**
31	41153	462	8866	13	29
32	41615	458	8853	12	28
33	42073	452	8841	12	27
34	42525	447	8829	13	26
35	42972	443	8816	12	25
36	43415	438	8804	12	24
37	43853	433	8792	13	23
38	44286	429	8779	12	22
39	44715	424	8767	12	21
40	45139	421	8755	13	**20**
41	45560	415	8742	12	19
42	45975	413	8730	11	18
43	46388	407	8719	13	17
44	46795	404	8706	12	16
45	47199	399	8694	13	15
46	47598	396	8681	12	14
47	47994	392	8669	12	13
48	48386	388	8657	13	12
49	48774	384	8644	12	11
50	49158	382	8632	12	**10**
51	49540	378	8620	12	9
52	49918	374	8608	12	8
53	50292	370	8596	13	7
54	50662	367	8583	12	6
55	51029	364	8571	13	5
56	51393	362	8558	11	4
57	51755	357	8547	13	3
58	52112	355	8534	12	2
59	52467	351	8522	12	1
60	52818		8510		**0**
′	cp.		sp.		′

88°

2°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{2}$,52818	348	$\bar{1}$,98510	13	60
1	53166	346	8497	11	59
2	53512	343	8486	13	58
3	53855	339	8473	12	57
4	54194	337	8461	13	56
5	54531	335	8448	11	55
6	54866	331	8437	13	54
7	55197	329	8424	12	53
8	55526	326	8412	12	52
9	55852	324	8400	12	51
10	56176	320	8388	13	**50**
11	56496	318	8375	12	49
12	56814	317	8363	12	48
13	57131	313	8351	12	47
14	57444	311	8339	12	46
15	57755	309	8327	12	45
16	58064	306	8315	12	44
17	58370	304	8303	13	43
18	58674	302	8290	12	42
19	58976	299	8278	12	41
20	59275	297	8266	13	**40**
21	59572	296	8253	11	39
22	59868	293	8242	13	38
23	60161	290	8229	12	37
24	60451	290	8217	12	36
25	60741	286	8205	12	35
26	61027	285	8193	12	34
27	61312	282	8181	12	33
28	61594	281	8169	13	32
29	61875	279	8156	11	31
30	62154	276	8145	13	**30**
31	62430	276	8132	11	29
32	62706	272	8121	13	28
33	62978	272	8108	12	27
34	63250	269	8096	12	26
35	63519	268	8084	12	25
36	63787	265	8072	12	24
37	64052	265	8060	12	23
38	64317	262	8048	12	22
39	64579	260	8036	13	21
40	64839	259	8023	12	**20**
41	65098	257	8011	12	19
42	65355	256	7999	12	18
43	65611	255	7987	11	17
44	65866	251	7976	13	16
45	66117	252	7963	12	15
46	66369	248	7951	12	14
47	66617	248	7939	12	13
48	66865	246	7927	12	12
49	67111	245	7915	12	11
50	67356	242	7903	13	**10**
51	67598	242	7890	11	9
52	67840	240	7879	13	8
53	68080	239	7866	12	7
54	68319	238	7854	11	6
55	68557	235	7843	13	5
56	68792	235	7830	12	4
57	69027	232	7818	12	3
58	69259	232	7806	12	2
59	69491	231	7794	12	1
60	69722		7782		**0**
′	cp.		sp.		′

87°

3°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{2}$,69722	228	$\bar{1}$,97782	12	**60**
1	69950	228	7770	12	59
2	70178	227	7758	12	58
3	70405	225	7746	12	57
4	70630	224	7734	12	56
5	70854	223	7722	12	55
6	71077	220	7710	12	54
7	71297	221	7698	12	53
8	71518	219	7686	12	52
9	71737	217	7674	12	51
10	71954	217	7662	12	**50**
11	72171	215	7650	12	49
12	72386	214	7638	12	48
13	72600	213	7626	12	47
14	72813	212	7614	12	46
15	73025	211	7602	12	45
16	73236	208	7590	12	44
17	73444	209	7578	12	43
18	73653	208	7566	12	42
19	73861	205	7554	13	41
20	74066	205	7541	11	**40**
21	74271	205	7530	12	39
22	74476	203	7518	12	38
23	74679	202	7506	12	37
24	74881	200	7494	12	36
25	75081	200	7482	12	35
26	75281	199	7470	12	34
27	75480	198	7458	12	33
28	75678	197	7446	11	32
29	75875	196	7435	13	31
30	76071	195	7422	12	**30**
31	76266	194	7410	12	29
32	76460	193	7398	11	28
33	76653	192	7387	12	27
34	76845	191	7375	12	26
35	77036	189	7363	13	25
36	77225	190	7350	12	24
37	77415	188	7338	11	23
38	77603	188	7327	12	22
39	77791	186	7315	12	21
40	77977	186	7303	12	**20**
41	78163	185	7291	12	19
42	78348	184	7279	11	18
43	78532	183	7268	12	17
44	78715	181	7256	13	16
45	78896	181	7243	12	15
46	79077	181	7231	12	14
47	79258	179	7219	12	13
48	79437	179	7207	11	12
49	79616	178	7196	12	11
50	79794	177	7184	12	**10**
51	79971	176	7172	12	9
52	80147	176	7160	12	8
53	80323	175	7148	12	7
54	80498	174	7136	12	6
55	80672	173	7124	11	5
56	80845	172	7113	12	4
57	81017	172	7101	12	3
58	81189	170	7089	12	2
59	81359	170	7077	12	1
60	81529		7065		**0**
′	cp.		sp.		′

86°

4°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{2}$,81529	170	$\bar{1}$,97065	12	**60**
1	81699	168	97053	12	59
2	81867	168	97041	12	58
3	82035	167	97029	11	57
4	82202	166	97018	12	56
5	82368	166	97006	12	55
6	82534	165	96994	12	54
7	82699	164	96982	12	53
8	82863	164	96970	12	52
9	83027	163	96958	11	51
10	83190	162	96947	12	**50**
11	83352	162	96935	12	49
12	83514	160	96923	12	48
13	83674	160	96911	12	47
14	83834	160	96899	12	46
15	83994	158	96887	12	45
16	84152	158	96875	11	44
17	84310	158	96864	12	43
18	84468	157	96852	11	42
19	84625	157	96841	12	41
20	84782	155	96829	12	**40**
21	84937	155	96817	12	39
22	85092	154	96805	12	38
23	85246	153	96793	12	37
24	85399	153	96781	12	36
25	85552	153	96769	11	35
26	85705	152	96758	12	34
27	85857	151	96746	12	33
28	86008	151	96734	12	32
29	86159	149	96722	12	31
30	86308	151	96710	11	**30**
31	86459	148	96699	12	29
32	86607	148	96687	12	28
33	86755	148	96675	12	27
34	86903	148	96663	11	26
35	87051	146	96652	12	25
36	87197	146	96640	12	24
37	87343	145	96628	12	23
38	87488	145	96616	11	22
39	87633	144	96605	12	21
40	87777	144	96593	12	**20**
41	87921	143	96581	12	19
42	88064	143	96569	11	18
43	88207	142	96558	12	17
44	88349	141	96546	12	16
45	88490	142	96534	11	15
46	88632	140	96523	13	14
47	88772	140	96510	12	13
48	88912	140	96498	11	12
49	89052	139	96487	12	11
50	89191	138	96475	12	**10**
51	89329	139	96463	11	9
52	89468	137	96452	12	8
53	89605	136	96440	12	7
54	89741	137	96428	11	6
55	89878	136	96417	12	5
56	90014	135	96405	12	4
57	90149	136	96393	11	3
58	90285	134	96382	12	2
59	90419	135	96370	12	1
60	99554		96358		**0**
′	cp.		sp.		′

85°

5°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{2}$,90554	133	$\bar{1}$,96358	12	**60**
1	90687	132	96346	12	59
2	90819	134	96334	11	58
3	90953	131	96323	12	57
4	91084	133	96311	11	56
5	91217	130	96300	12	55
6	91347	132	96288	11	54
7	91479	130	96277	13	53
8	91609	129	96264	12	52
9	91738	130	96252	11	51
10	91868	128	96241	12	**50**
11	91996	129	96229	11	49
12	92125	128	96218	12	48
13	92253	128	96206	11	47
14	92381	127	96195	13	46
15	92508	127	96182	11	45
16	92635	126	96171	12	44
17	92761	126	96159	11	43
18	92887	125	96148	12	42
19	93012	126	96136	11	41
20	93138	124	96125	13	**40**
21	93262	125	96112	11	39
22	93387	123	96101	12	38
23	93510	124	96089	11	37
24	93634	123	96078	11	36
25	93757	122	96067	13	35
26	93879	123	96054	11	34
27	94002	121	96043	12	33
28	94123	122	96031	11	32
29	94245	120	96020	12	31
30	94365	121	96008	12	**30**
31	94486	121	95996	11	29
32	94607	119	95985	12	28
33	94726	120	95973	11	27
34	94846	118	95962	13	26
35	94964	119	95949	11	25
36	95083	119	95938	11	24
37	95202	117	95927	12	23
38	95319	118	95915	12	22
39	95437	118	95903	11	21
40	95555	116	95892	12	**20**
41	95671	117	95880	11	19
42	95788	116	95869	12	18
43	95904	115	95857	12	17
44	96019	116	95845	11	16
45	96135	115	95834	11	15
46	96250	114	95823	13	14
47	96364	114	95810	11	13
48	96478	115	95799	11	12
49	96593	112	95788	12	11
50	96705	114	95776	12	**10**
51	96819	113	95764	11	9
52	96932	113	95753	11	8
53	97045	111	95742	13	7
54	97156	112	95729	11	6
55	97268	112	95718	11	5
56	97380	110	95707	13	4
57	97490	111	95694	11	3
58	97601	111	95683	11	2
59	97712	110	95672	12	1
60	97822		95660		**0**
′	cp.		sp.		′

84°

6°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{2}$,97822	110	$\bar{1}$,95660	11	**60**
1	97932	109	95649	12	59
2	98041	110	95637	12	58
3	98151	109	95625	11	57
4	98260	108	95614	11	56
5	98368	108	95603	13	55
6	98476	108	95590	11	54
7	98584	107	95579	11	53
8	98691	108	95568	12	52
9	98799	107	95556	11	51
10	98906	107	95545	11	**50**
11	99013	105	95534	13	49
12	99118	106	95521	11	48
13	99224	106	95510	12	47
14	99330	106	95498	11	46
15	99436	105	95487	11	45
16	99541	105	95476	12	44
17	99646	104	95464	11	43
18	99750	104	95453	12	42
19	99854	103	95441	12	41
20	99957	104	95429	11	**40**
21	$\bar{1}$,00061	104	95418	12	39
22	00165	103	95406	11	38
23	00268	102	95395	12	37
24	00370	103	95383	11	36
25	00473	102	95372	11	35
26	00575	102	95361	12	34
27	00677	102	95349	11	33
28	00779	101	95338	12	32
29	00880	101	95326	11	31
30	00981	101	95315	12	**30**
31	01082	99	95303	12	29
32	01181	100	95291	11	28
33	01281	100	95280	12	27
34	01381	100	95268	11	26
35	01481	99	95257	12	25
36	01580	99	95245	11	24
37	01679	99	95234	12	23
38	01778	98	95222	11	22
39	01876	99	95211	12	21
40	01975	98	95199	11	**20**
41	02073	97	95188	12	19
42	02170	98	95176	11	18
43	02268	97	95165	12	17
44	02365	98	95153	10	16
45	02463	96	95143	12	15
46	02559	97	95131	11	14
47	02656	96	95120	12	13
48	02752	95	95108	11	12
49	02847	96	95097	12	11
50	02943	95	95085	11	**10**
51	03038	95	95074	12	9
52	03133	95	95062	11	8
53	03228	95	95051	12	7
54	03323	94	95039	11	6
55	03417	94	95028	12	5
56	03511	94	95016	11	4
57	03605	94	95005	11	3
58	03699	93	94994	11	2
59	03792	93	94983	12	1
60	03885		94971		**0**
′	cp.		sp.		′

83°

7°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,03885	93	$\bar{1}$,94971	11	**60**
1	03978	93	94960	12	59
2	04071	92	94948	12	58
3	04163	92	94936	11	57
4	04255	93	94925	11	56
5	04348	91	94914	11	55
6	04439	92	94903	12	54
7	04531	91	94891	11	53
8	04622	91	94880	12	52
9	04713	90	94868	12	51
10	04803	92	94856	10	**50**
11	04895	90	94846	12	49
12	04985	90	94834	11	48
13	05075	89	94823	12	47
14	05164	90	94811	12	46
15	05254	90	94799	10	45
16	05344	89	94789	12	44
17	05433	88	94777	11	43
18	05521	89	94766	12	42
19	05610	89	94754	11	41
20	05699	88	94743	11	**40**
21	05787	88	94732	12	39
22	05875	88	94720	12	38
23	05963	88	94708	10	37
24	06051	87	94698	12	36
25	06138	87	94686	12	35
26	06225	87	94674	11	34
27	06312	87	94663	11	33
28	06399	87	94652	11	32
29	06486	86	94641	12	31
30	06572	87	94629	11	**30**
31	06659	85	94618	11	29
32	06744	86	94607	12	28
33	06830	86	94595	11	27
34	06916	85	94584	12	26
35	07001	85	94572	11	25
36	07086	85	94561	11	24
37	07171	85	94550	12	23
38	07256	84	94538	11	22
39	07340	85	94527	11	21
40	07425	83	94516	12	**20**
41	07508	84	94504	11	19
42	07592	84	94493	11	18
43	07676	83	94482	12	17
44	07759	84	94470	11	16
45	07843	83	94459	11	15
46	07926	83	94448	12	14
47	08009	83	94436	11	13
48	08092	82	94425	11	12
49	08174	83	94414	11	11
50	08257	82	94403	12	**10**
51	08339	81	94391	12	9
52	08420	83	94379	10	8
53	08503	81	94369	12	7
54	08584	82	94357	11	6
55	08666	80	94346	12	5
56	08746	82	94334	10	4
57	08828	80	94324	12	3
58	08908	82	94312	11	2
59	08990	80	94301	12	1
60	09070		94289		**0**
′	cp.		sp.		′

82°

8°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,09070	80	$\bar{1}$,94289	10	**60**
1	09150	80	94279	12	59
2	09230	80	94267	11	58
3	09310	80	94256	12	57
4	09390	80	94244	11	56
5	09470	78	94233	11	55
6	09548	80	94222	11	54
7	09628	79	94211	12	53
8	09707	79	94199	11	52
9	09786	78	94188	12	51
10	09864	79	94176	10	**50**
11	09943	78	94166	12	49
12	10021	78	94154	11	48
13	10099	78	94143	12	47
14	10177	78	94131	11	46
15	10255	78	94120	11	45
16	10333	77	94109	11	44
17	10410	78	94098	11	43
18	10488	76	94087	12	42
19	10564	77	94075	11	41
20	10641	77	94064	12	**40**
21	10718	77	94052	11	39
22	10795	76	94041	11	38
23	10871	76	94030	11	37
24	10947	76	94019	11	36
25	11023	77	94008	11	35
26	11100	75	93997	12	34
27	11175	76	93985	11	33
28	11251	75	93974	12	32
29	11326	75	93962	11	31
30	11401	76	93951	11	**30**
31	11477	74	93940	11	29
32	11551	75	93929	11	28
33	11626	75	93918	11	27
34	11701	74	93907	12	26
35	11775	74	93895	11	25
36	11849	75	93884	11	24
37	11924	74	93873	11	23
38	11998	73	93862	12	22
39	12071	74	93850	11	21
40	12145	74	93839	11	**20**
41	12219	73	93828	12	19
42	12292	73	93816	11	18
43	12365	73	93805	10	17
44	12438	74	93795	11	16
45	12512	72	93784	12	15
46	12584	72	93772	11	14
47	12656	73	93761	11	13
48	12729	73	93750	11	12
49	12802	71	93739	12	11
50	12873	72	93727	11	**10**
51	12945	72	93716	11	9
52	13017	72	93705	11	8
53	13089	71	93694	12	7
54	13160	72	93682	11	6
55	13232	71	93671	11	5
56	13303	71	93660	11	4
57	13374	71	93649	11	3
58	13445	70	93638	12	2
59	13515	71	93626	11	1
60	13586		93615		**0**
′	cp.		sp.		′

81°

9°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,13586	71	$\bar{1}$,93615	11	**60**
1	13657	70	93604	11	59
2	13727	71	93593	11	58
3	13798	70	93582	11	57
4	13868	69	93571	12	56
5	13937	70	93559	11	55
6	14007	70	93548	11	54
7	14077	70	93537	11	53
8	14147	69	93526	11	52
9	14216	69	93515	11	51
10	14285	70	93504	11	**50**
11	14355	68	93493	12	49
12	14423	69	93481	11	48
13	14492	68	93470	11	47
14	14560	69	93459	11	46
15	14629	69	93448	12	45
16	14698	68	93436	11	44
17	14766	68	93425	11	43
18	14834	68	93414	11	42
19	14902	68	93403	11	41
20	14970	68	93392	11	**40**
21	15038	68	93381	11	39
22	15106	67	93370	11	38
23	15173	68	93359	11	37
24	15241	67	93348	11	36
25	15308	66	93337	12	35
26	15374	67	93325	11	34
27	15441	67	93314	12	33
28	15508	66	93302	11	32
29	15574	67	93291	11	31
30	15641	66	93280	11	**30**
31	15707	67	93269	11	29
32	15774	66	93258	11	28
33	15840	66	93247	11	27
34	15906	66	93236	11	26
35	15972	65	93225	11	25
36	16037	66	93214	12	24
37	16103	66	93202	11	23
38	16169	66	93191	10	22
39	16235	65	93181	11	21
40	16300	65	93170	11	**20**
41	16365	65	93159	11	19
42	16430	65	93148	12	18
43	16495	65	93136	11	17
44	16560	64	93125	11	16
45	16624	65	93114	11	15
46	16689	64	93103	11	14
47	16753	64	93092	11	13
48	16817	64	93081	12	12
49	16881	64	93069	11	11
50	16945	64	93058	11	**10**
51	17009	64	93047	11	9
52	17073	64	93036	10	8
53	17137	64	93026	12	7
54	17201	63	93014	11	6
55	17264	63	93003	11	5
56	17327	**64**	92992	11	4
57	17391	62	92981	11	3
58	17453	63	92970	12	2
59	17516	**64**	92958	10	1
60	17580		92948		**0**
′	cp.		sp.		′

80°

10°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,17580	63	$\bar{1}$,92948	11	**60**
1	17643	62	92937	11	59
2	17705	62	92926	12	58
3	17767	63	92914	11	57
4	17830	62	92903	11	56
5	17892	63	92892	10	55
6	17955	62	92882	12	54
7	18017	61	92870	11	53
8	18078	62	92859	11	52
9	18140	61	92848	11	51
10	18201	63	92837	11	**50**
11	18264	61	92826	11	49
12	18325	61	92815	11	48
13	18386	61	92804	11	47
14	18447	61	92793	12	46
15	18508	62	92781	10	45
16	18570	61	92771	11	44
17	18631	60	92760	12	43
18	18691	61	92748	11	42
19	18752	61	92737	10	41
20	18813	60	92727	11	**40**
21	18873	60	92716	12	39
22	18933	61	92704	10	38
23	18994	60	92694	11	37
24	19054	60	92683	12	36
25	19114	60	92671	11	35
26	19174	60	92660	10	34
27	19234	60	92650	12	33
28	19294	59	92638	11	32
29	19353	60	92627	10	31
30	19413	59	92617	12	**30**
31	19472	59	92605	11	29
32	19531	60	92594	10	28
33	19591	59	92584	12	27
34	19650	59	92572	11	26
35	19709	59	92561	11	25
36	19768	59	92550	11	24
37	19827	58	92539	11	23
38	19885	59	92528	11	22
39	19944	58	92517	11	21
40	20002	58	92506	11	**20**
41	20060	59	92495	11	19
42	20119	58	92484	11	18
43	20177	59	92473	11	17
44	20236	57	92462	11	16
45	20293	58	92451	11	15
46	20351	58	92440	11	14
47	20409	58	92429	11	13
48	20467	58	92418	11	12
49	20525	57	92407	11	11
50	20582	57	92396	11	**10**
51	20639	58	92385	11	9
52	20697	56	92374	11	8
53	20753	58	92363	11	7
54	20811	57	92352	11	6
55	20868	57	92341	11	5
56	20925	56	92330	11	4
57	20981	58	92319	10	3
58	21039	56	92309	12	2
59	21095	57	92297	10	1
60	21152		92287		**0**
′	cp.		sp.		′

79°

11°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,21152	56	$\bar{1}$,92287	12	**60**
1	21208	57	92275	10	59
2	21265	55	92265	12	58
3	21320	57	92253	10	57
4	21377	56	92243	12	56
5	21433	56	92231	10	55
6	21489	55	92221	12	54
7	21544	57	92209	10	53
8	21601	55	92199	12	52
9	21656	56	92187	10	51
10	21712	55	92177	12	**50**
11	21767	56	92165	10	49
12	21823	54	92155	12	48
13	21877	56	92143	10	47
14	21933	55	92133	12	46
15	21988	55	92121	10	45
16	22043	54	92111	12	44
17	22097	56	92099	10	43
18	22153	55	92089	11	42
19	22208	54	92078	11	41
20	22262	55	92067	11	**40**
21	22317	54	92056	11	39
22	22371	55	92045	11	38
23	22426	54	92034	10	37
24	22480	54	92024	12	36
25	22534	54	92012	10	35
26	22588	54	92002	12	34
27	22642	54	91990	11	33
28	22696	54	91979	10	32
29	22750	54	91969	12	31
30	22804	54	91957	10	**30**
31	22858	54	91947	11	29
32	22912	52	91936	11	28
33	22964	54	91925	11	27
34	23018	54	91914	11	26
35	23072	52	91903	11	25
36	23124	54	91892	11	24
37	23178	53	91881	10	23
38	23231	53	91871	12	22
39	23284	53	91859	11	21
40	23337	53	91848	10	**20**
41	23390	52	91838	12	19
42	23442	53	91826	10	18
43	23495	53	91816	11	17
44	23548	53	91805	11	16
45	23601	51	91794	11	15
46	23652	53	91783	11	14
47	23705	52	91772	11	13
48	23757	52	91761	11	12
49	23809	52	91750	11	11
50	23861	53	91739	11	**10**
51	23914	52	91728	10	9
52	23966	51	91718	12	8
53	24017	52	91706	11	7
54	24069	52	91695	10	6
55	24121	51	91685	11	5
56	24172	51	91674	12	4
57	24223	52	91662	10	3
58	24275	51	91652	11	2
59	24326	52	91641	11	1
60	24378		91630		**0**
′	cp.		sp.		′

78°

12°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,24378	51	$\bar{1}$,91630	10	**60**
1	24429	51	91620	12	59
2	24480	51	91608	11	58
3	24531	51	91597	10	57
4	24582	51	91587	11	56
5	24633	51	91576	11	55
6	24684	51	91565	10	54
7	24735	50	91555	12	53
8	24785	50	91543	11	52
9	24835	51	91532	11	51
10	24886	51	91521	10	**50**
11	24937	50	91511	11	49
12	24987	50	91500	11	48
13	25037	51	91489	11	47
14	25088	49	91478	11	46
15	25137	50	91467	11	45
16	25187	50	91456	11	44
17	25237	50	91445	11	43
18	25287	50	91434	10	42
19	25337	50	91424	11	41
20	25387	50	91413	11	**40**
21	25437	49	91402	11	39
22	25486	50	91391	10	38
23	25536	48	91381	12	37
24	25584	50	91369	11	36
25	25634	49	91358	11	35
26	25683	49	91347	10	34
27	25732	50	91337	11	33
28	25782	49	91326	11	32
29	25831	49	91315	11	31
30	25880	49	91304	11	**30**
31	25929	48	91293	10	29
32	25977	49	91283	11	28
33	26026	49	91272	11	27
34	26075	49	91261	11	26
35	26124	48	91250	11	25
36	26172	49	91239	11	24
37	26221	48	91228	10	23
38	26269	48	91218	11	22
39	26317	49	91207	11	21
40	26366	48	91196	11	**20**
41	26414	48	91185	11	19
42	26462	48	91174	11	18
43	26510	48	91163	10	17
44	26558	48	91153	11	16
45	26606	48	91142	11	15
46	26654	47	91131	11	14
47	26701	48	91120	11	13
48	26749	47	91109	11	12
49	26796	48	91098	11	11
50	26844	47	91087	11	**10**
51	26891	48	91076	10	9
52	26939	47	91066	11	8
53	26986	47	91055	11	7
54	27033	47	91044	11	6
55	27080	48	91033	10	5
56	27128	47	91023	11	4
57	27175	47	91012	11	3
58	27222	47	91001	11	2
59	27269	47	90990	11	1
60	27316		90979		**0**
′	cp.		sp.		′

77°

13°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,27316	46	$\bar{1}$,90979	11	**60**
1	27362	47	90968	10	59
2	27409	47	90958	11	58
3	27456	46	90947	11	57
4	27502	47	90936	10	56
5	27549	47	90926	11	55
6	27596	46	90915	11	54
7	27642	46	90904	11	53
8	27688	46	90893	11	52
9	27734	46	90882	11	51
10	27780	46	90871	11	**50**
11	27826	47	90860	10	49
12	27873	46	90850	11	48
13	27919	46	90839	11	47
14	27965	46	90828	11	46
15	28011	45	90817	11	45
16	28056	46	90806	11	44
17	28102	46	90795	10	43
18	28148	46	90785	11	42
19	28194	45	90774	11	41
20	28239	45	90763	11	**40**
21	28284	46	90752	10	39
22	28330	46	90742	11	38
23	28376	45	90731	11	37
24	28421	45	90720	11	36
25	28466	45	90709	11	35
26	28511	45	90698	10	34
27	28556	45	90688	11	33
28	28601	45	90677	11	32
29	28646	45	90666	11	31
30	28691	45	90655	10	**30**
31	28736	45	90645	11	29
32	28781	44	90634	11	28
33	28825	44	90623	11	27
34	28869	46	90612	10	26
35	28915	44	90602	11	25
36	28959	44	90591	11	24
37	29003	45	90580	10	23
38	29048	44	90570	11	22
39	29092	44	90559	11	21
40	29136	45	90548	10	**20**
41	29181	44	90538	12	19
42	29225	44	90526	11	18
43	29269	45	90515	10	17
44	29314	43	90505	11	16
45	29357	44	90494	11	15
46	29401	44	90483	10	14
47	29445	44	90473	11	13
48	29489	43	90462	11	12
49	29532	45	90451	10	11
50	29577	43	90441	11	**10**
51	29620	43	90430	12	9
52	29663	44	90418	10	8
53	29707	43	90408	11	7
54	29750	43	90397	11	6
55	29793	44	90386	10	5
56	29837	43	90376	11	4
57	29880	44	90365	10	3
58	29924	43	90355	11	2
59	29967	43	90344	12	1
60	30010		90332		**0**
′	cp.		sp.		′

76°

14°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,30010		$\bar{1}$,90332		**60**
		43		10	
1	30053		90322		59
		43		11	
2	30096		90311		58
		43		10	
3	30139		90301		57
		43		11	
4	30182		90290		56
		43		10	
5	30225		90280		55
		42		12	
6	30267		90268		54
		43		11	
7	30310		90257		53
		43		10	
8	30353		90247		52
		42		11	
9	30395		90236		51
		43		10	
10	30438		90226		**50**
		42		11	
11	30480		90215		49
		43		11	
12	30523		90204		48
		42		11	
13	30565		90193		47
		43		10	
14	30608		90183		46
		42		11	
15	30650		90172		45
		42		10	
16	30592		90162		44
		42		12	
17	30734		90150		43
		43		10	
18	30777		90140		42
		41		11	
19	30818		90129		41
		43		10	
20	30861		90119		**40**
		41		12	
21	30902		90107		39
		42		10	
22	30944		90097		38
		42		11	
23	30986		90086		37
		42		10	
24	31028		90076		36
		41		12	
25	31069		90064		35
		42		10	
26	31111		90054		34
		41		11	
27	31152		90043		33
		42		10	
28	31194		90033		32
		41		12	
29	31235		90021		**31**
		42		10	
30	31277		90011		**30**
		42		10	
31	31319		90001		29
		41		11	
32	31360		89990		28
		41		11	
33	31401		89979		27
		41		11	
34	31442		89968		26
		41		10	
35	31483		89958		25
		41		12	
36	31524		89946		24
		41		10	
37	31565		89936		23
		42		10	
38	31607		89926		22
		40		11	
39	31647		89915		21
		42		11	
40	31689		89904		**20**
		40		11	
41	31729		86893		19
		41		10	
42	31770		89883		18
		41		11	
43	31811		89872		17
		40		11	
44	31851		89861		16
		41		10	
45	31892		89851		15
		41		11	
46	31933		89840		14
		40		11	
47	31973		89829		13
		41		10	
48	32014		89819		12
		40		12	
49	32054		89807		11
		40		10	
50	32094		89797		**10**
		41		10	
51	32135		89787		9
		40		12	
52	32175		89775		8
		40		10	
53	32215		89765		7
		41		10	
54	32256		89755		6
		39		12	
55	32295		89743		5
		41		10	
56	32336		89733		4
		40		10	
57	32376		89723		3
		40		11	
58	32416		89712		2
		39		11	
59	32455		89701		1
		41		11	
60	32496		89690		**0**
′	cp.		sp.		′

15°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,32496		$\bar{1}$,89690		**60**
		40		10	
1	32536		89680		59
		39		11	
2	32575		89669		58
		40		11	
3	32615		89658		57
		40		10	
4	32655		89648		56
		40		11	
5	32695		89637		55
		39		11	
6	32734		89626		54
		39		10	
7	32773		89616		53
		40		11	
8	32813		89605		52
		39		11	
9	32852		89594		51
		39		11	
10	32891		89583		**50**
		40		10	
11	32931		89573		49
		39		11	
12	32970		89562		48
		40		10	
13	33010		89552		47
		38		11	
14	33048		89541		46
		40		11	
15	33088		89530		45
		39		10	
16	33127		89520		44
		39		11	
17	33166		89509		43
		39		11	
18	33205		89498		42
		39		11	
19	33244		89487		41
		39		10	
20	33283		89477		**40**
		39		11	
21	33322		89466		39
		39		10	
22	33361		89456		38
		38		12	
23	33399		89444		37
		39		10	
24	33438		89434		36
		38		10	
25	33476		89424		35
		39		11	
26	33515		89413		34
		39		10	
27	33554		89403		33
		39		11	
28	33593		89392		32
		37		11	
29	33630		89381		31
		39		11	
30	33669		89370		**30**
		38		10	
31	33707		89360		29
		39		11	
32	33746		89349		28
		38		10	
33	33784		89339		27
		39		11	
34	33823		89328		26
		38		11	
35	33861		89317		25
		38		10	
36	33899		89307		24
		38		12	
37	33937		89295		23
		38		10	
38	33975		89285		22
		38		11	
39	34013		89274		21
		38		10	
40	34051		89264		**20**
		38		11	
41	34089		89253		19
		38		10	
42	34127		89243		18
		38		11	
43	34165		89232		17
		38		10	
44	34203		89222		16
		37		11	
45	34240		89211		15
		38		11	
46	34278		89200		14
		38		10	
47	34316		89190		13
		37		12	
48	34353		89178		12
		37		10	
49	34390		89168		11
		38		11	
50	34428		89157		**10**
		37		10	
51	34465		89147		9
		38		11	
52	34503		89136		8
		37		11	
53	34540		89125		7
		38		10	
54	34578		89115		6
		37		11	
55	34615		89104		5
		37		10	
56	34652		89094		4
		37		11	
57	34689		89083		3
		38		11	
58	34727		89072		2
		37		10	
59	34764		89062		1
		37		11	
60	34801		89051		**0**
′	cp.		sp.		′

16°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,34801	37	$\bar{1}$,89051	10	**60**
1	34838	37	89041	11	59
2	34875	37	89030	11	58
3	34912	37	89019	10	57
4	34949	36	89009	11	56
5	34985	37	88998	11	55
6	35022	37	88987	10	54
7	35059	37	88977	11	53
8	35096	36	88966	11	52
9	35132	37	88955	10	51
10	35169	37	88945	11	**50**
11	35206	36	88934	11	49
12	35242	36	88923	10	48
13	35278	38	88913	10	47
14	35316	36	88903	11	46
15	35352	37	88892	10	45
16	35389	36	88882	11	44
17	35425	36	88871	11	43
18	35461	36	88860	10	42
19	35497	36	88850	11	41
20	35533	36	88839	11	**40**
21	35569	37	88828	10	39
22	35606	36	88818	11	38
23	35642	35	88807	11	37
24	35677	37	88796	10	36
25	35714	36	88786	10	35
26	35750	36	88776	11	34
27	35786	36	88765	11	33
28	35822	36	88754	11	32
29	35858	35	88743	10	31
30	35893	36	88733	11	**30**
31	35929	35	88722	11	29
32	35964	37	88711	10	28
33	36001	35	88701	10	27
34	36036	36	88691	11	26
35	36072	35	88680	11	25
36	36107	36	88669	11	24
37	36143	35	88658	10	23
38	36178	36	88648	10	22
39	36214	35	88638	11	21
40	36249	36	88627	11	**20**
41	36285	35	88616	10	19
42	36320	35	88606	11	18
43	36355	36	88595	10	17
44	36391	35	88585	11	16
45	36426	35	88574	11	15
46	36461	35	88563	10	14
47	36496	35	88553	11	13
48	36531	35	88542	10	12
49	36566	35	88532	11	11
50	36601	35	88521	11	**10**
51	36636	35	88510	11	9
52	36671	35	88499	9	8
53	36706	35	88490	11	7
54	36741	34	88479	11	6
55	36775	35	88468	11	5
56	36810	35	88457	10	4
57	36845	35	88447	11	3
58	36880	34	88436	11	2
59	36914	36	88425	9	1
60	36950		88416		**0**
′	cp.		sp.		′

73°

17°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,36950	34	$\bar{1}$,88416	11	**60**
1	36984	34	88405	11	59
2	37018	34	88394	11	58
3	37052	35	88383	10	57
4	37087	35	88373	11	56
5	37122	34	88362	11	55
6	37156	35	88351	10	54
7	37191	34	88341	10	53
8	37225	34	88331	11	52
9	37259	35	88320	10	51
10	37294	33	88310	11	**50**
11	37327	34	88299	11	49
12	37361	35	88288	10	48
13	37396	34	88278	11	47
14	37430	34	88267	11	46
15	37464	34	88256	10	45
16	37498	34	88246	11	44
17	37532	33	88235	11	43
18	37565	35	88224	9	42
19	37600	33	88215	11	41
20	37633	34	88204	11	**40**
21	37667	34	88193	10	39
22	37701	34	88183	11	38
23	37735	34	88172	10	37
24	37769	33	88162	11	36
25	37802	34	88151	11	35
26	37836	34	88140	10	34
27	37870	33	88130	11	33
28	37903	34	88119	10	32
29	37937	33	88109	11	31
30	37970	34	88098	10	**30**
31	38004	33	88088	11	29
32	38037	33	88077	11	28
33	38070	34	88066	10	27
34	38104	33	88056	11	26
35	38137	34	88045	10	25
36	38171	33	88035	11	24
37	38204	33	88024	10	23
38	38237	33	88014	11	22
39	38270	34	88003	10	21
40	38304	32	87993	11	**20**
41	38336	34	87982	10	19
42	38370	33	87972	11	18
43	38403	32	87961	11	17
44	38435	34	87950	10	16
45	38469	32	87940	11	15
46	38501	34	87929	10	14
47	38535	32	87919	11	13
48	38567	33	87908	10	12
49	38600	33	87898	11	11
50	38633	33	87887	11	**10**
51	38666	33	87876	10	9
52	38699	32	87866	11	8
53	38731	33	87855	10	7
54	38764	32	87845	11	6
55	38796	33	87834	10	5
56	38829	32	87824	11	4
57	38861	33	87813	10	3
58	38894	32	87803	11	2
59	38926	33	87792	10	1
60	38959		87782		**0**
′	cp.		sp.		′

72°

18°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,38959	32	$\bar{1}$,87782	11	**60**
1	38991	33	87771	11	59
2	39024	33	87760	10	58
3	39057	31	87750	11	57
4	39088	33	87739	10	56
5	39121	32	87729	11	55
6	39153	32	87718	10	54
7	39185	33	87708	10	53
8	39218	32	87698	11	52
9	39250	32	87687	11	51
10	39282	32	87676	11	**50**
11	39314	32	87665	10	49
12	39346	32	87655	10	48
13	39378	32	87645	11	47
14	39410	32	87634	10	46
15	39442	32	87624	11	45
16	39474	32	87613	11	44
17	39506	32	87602	10	43
18	39538	31	87592	11	42
19	39569	32	87581	10	41
20	39601	32	87571	10	**40**
21	39633	31	87561	12	39
22	39664	32	87549	10	38
23	39696	32	87539	10	37
24	39728	31	87529	11	**36**
25	39759	32	87518	10	**35**
26	39791	32	87508	11	34
27	39823	31	87497	11	33
28	39854	32	87486	10	32
29	39886	32	87476	10	31
30	39918	31	87466	11	**30**
31	39949	31	87455	11	29
32	39980	32	87444	10	28
33	40012	31	87434	10	27
34	40043	31	87424	12	26
35	40074	32	87412	10	25
36	40106	31	87402	10	24
37	40137	32	87392	10	23
38	40169	30	87382	12	22
39	40199	31	87370	10	21
40	40230	32	87360	10	**20**
41	40262	31	87350	10	19
42	40293	30	87340	12	18
43	40323	32	87328	10	17
44	40355	31	87318	10	16
45	40386	31	87308	10	15
46	40417	30	87298	12	14
47	40447	31	87286	10	13
48	40478	31	87276	10	12
49	40509	32	87266	11	11
50	40541	31	87255	10	**10**
51	40572	30	87245	11	9
52	40602	31	37234	11	8
53	40633	30	87223	10	7
54	40663	31	87213	10	6
55	40694	31	87203	11	5
56	40725	30	87192	11	4
57	40755	31	87181	10	3
58	40786	30	87171	11	2
59	40816	31	87160	10	1
60	40847		87150		**0**
′	cp.		sp.		′

71°

19°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,40847	31	$\bar{1}$,87150	10	**60**
1	40878	31	87140	11	59
2	40909	30	87129	10	58
3	40939	30	87119	11	57
4	40969	30	87108	11	56
5	40999	31	87097	10	55
6	41030	30	87087	11	54
7	41060	31	87076	10	53
8	41091	30	87066	10	52
9	41121	30	87056	11	51
10	41151	30	87045	11	**50**
11	41181	30	87034	10	49
12	41211	30	87024	11	48
13	41241	30	87013	10	47
14	41271	31	87003	11	46
15	41302	30	86992	10	45
16	41332	30	86982	11	44
17	41362	30	86971	10	43
18	41392	30	86961	10	42
19	41422	30	86951	11	41
20	41452	30	86940	10	**40**
21	41482	30	86930	11	39
22	41512	29	86919	11	38
23	41541	30	86908	11	**37**
24	41571	30	86897	10	36
25	41601	30	86887	10	35
26	41631	29	86877	11	34
27	41660	30	86866	10	33
28	41690	30	86856	11	32
29	41720	30	86845	10	31
30	41750	29	86835	11	**30**
31	41779	30	86824	10	29
32	41809	29	86814	11	28
33	41838	30	86803	10	27
34	41868	29	86793	11	26
35	41897	30	86782	10	25
36	41927	29	86772	11	24
37	41956	30	86761	10	23
38	41986	29	86751	11	22
39	42015	30	86740	10	21
40	42045	29	86730	11	**20**
41	42074	29	86719	10	19
42	42103	30	86709	11	18
43	42133	29	86698	10	17
44	42162	29	86688	11	16
45	42191	29	86677	10	15
46	42220	29	86667	11	14
47	42249	29	86656	11	13
48	42278	29	86645	10	12
49	42307	30	86635	10	11
50	42337	30	86625	10	**10**
51	42367	28	86615	11	9
52	42395	29	86604	10	8
53	42424	29	86594	11	7
54	42453	29	86583	10	6
55	42482	29	86573	11	5
56	42511	29	86562	11	4
57	42540	29	86551	10	3
58	42569	28	86541	11	2
59	42597	29	86530	10	1
60	42626		86520		**0**
′	cp.		sp.		′

70°

20°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,42626	30	$\bar{1}$,86520	10	**60**
1	42656	29	86510	11	59
2	42685	28	86499	10	58
3	42713	29	86489	11	57
4	42742	28	86478	10	56
5	42770	29	86468	11	55
6	42799	28	86457	11	54
7	42827	29	86446	10	53
8	42856	29	86436	10	52
9	42885	29	86426	11	51
10	42914	28	86415	10	**50**
11	42942	28	86405	11	49
12	42970	29	86394	11	48
13	42999	28	86383	10	47
14	43027	29	86373	10	46
15	43056	29	86363	11	45
16	43085	28	86352	10	44
17	43113	28	86342	11	43
18	43141	28	86331	11	42
19	43169	29	86320	9	41
20	43198	28	86311	11	**40**
21	43226	28	86300	11	39
22	43254	28	86289	10	38
23	43282	28	86279	11	37
24	43310	29	86268	10	36
25	43339	28	86258	10	35
26	43367	28	86248	11	34
27	43395	28	86237	11	33
28	43423	28	86226	11	32
29	43451	29	86215	9	31
30	43480	27	86206	11	**30**
31	43507	28	86195	11	29
32	43535	28	86184	10	28
33	43563	28	86174	10	27
34	43591	28	86164	11	26
35	43619	28	86153	11	25
36	43647	28	86142	9	24
37	43675	28	86133	11	23
38	43703	27	86122	11	22
39	43730	28	86111	11	21
40	43758	28	86100	9	**20**
41	43786	28	86091	11	19
42	43814	27	86080	11	18
43	43841	29	86069	10	17
44	43870	27	86059	11	16
45	43897	27	86048	10	15
46	43924	28	86038	11	14
47	43952	28	86027	10	13
48	43980	27	86017	11	12
49	44007	27	86006	11	11
50	44034	29	85995	9	**10**
51	44063	27	85986	11	9
52	44090	27	85975	11	8
53	44117	28	85964	10	7
54	44145	27	85954	11	6
55	44172	28	85943	9	5
56	44200	27	85934	11	4
57	44227	27	85923	11	3
58	44254	28	85912	10	2
59	44282	27	85902	11	1
60	44309		85891		**0**
′	cp.		sp.		′

69°

21°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,44309	27	$\bar{1}$,85891	11	**60**
1	44336	28	85880	10	59
2	44364	27	85870	10	58
3	44391	27	85860	10	57
4	44418	27	85850	11	56
5	44445	27	85839	11	55
6	44472	28	85828	10	54
7	44500	26	85818	11	53
8	44526	28	85807	10	52
9	44554	27	85797	11	51
10	44581	26	85786	10	**50**
11	44607	28	85776	10	49
12	44635	26	85766	11	48
13	44661	28	85755	10	47
14	44689	26	85745	11	46
15	44715	28	85734	10	45
16	44743	26	85724	11	44
17	44769	27	85713	11	43
18	44796	27	85702	10	42
19	44823	26	85692	11	41
20	44849	28	85681	10	**40**
21	44877	26	85671	11	39
22	44903	27	85660	9	38
23	44930	27	85651	11	37
24	44957	27	85640	10	36
25	44984	26	85630	11	35
26	45010	27	85619	10	34
27	45037	26	85609	11	33
28	45063	27	85598	10	32
29	45090	27	85588	11	31
30	45117	27	85577	10	**30**
31	45144	26	85567	11	29
32	45170	27	85556	10	28
33	45197	26	85546	11	27
34	45223	27	85535	10	26
35	45250	25	85525	11	25
36	45275	27	85514	10	24
37	45302	26	85504	11	23
38	45328	27	85493	10	22
39	45355	27	85483	10	21
40	45382	26	85473	11	**20**
41	45408	26	85462	10	19
42	45434	26	85452	11	18
43	45460	27	85441	10	17
44	45487	26	85431	11	16
45	45513	26	85420	10	15
46	45539	26	85410	11	14
47	45565	26	85399	10	13
48	45591	27	85389	11	12
49	45618	26	85378	11	11
50	45644	26	85367	10	**10**
51	45670	26	85357	11	9
52	45696	26	85346	10	8
53	45722	26	85336	10	7
54	45748	26	85326	11	6
55	45774	26	85315	10	5
56	45800	26	85305	11	4
57	45826	26	85294	10	3
58	45852	26	85284	10	2
59	45878	26	85274	11	1
60	45904		85263		**0**
′	cp.		sp.		′

68°

22°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,45904	26	$\bar{1}$,85263	11	**60**
1	45930	26	85252	10	59
2	45956	25	85242	11	58
3	45981	26	85231	10	57
4	46007	27	85221	10	56
5	46034	25	85211	11	55
6	46059	26	85200	10	54
7	46085	26	85190	10	**53**
8	46111	25	85180	12	52
9	46136	26	85168	10	**51**
10	46162	26	85158	10	**50**
11	46188	25	85148	11	49
12	46213	26	85137	10	48
13	46239	26	85127	10	**47**
14	46265	25	85117	11	46
15	46290	26	85106	11	45
16	46316	25	85095	10	44
17	46341	26	85085	10	43
18	46367	25	85075	11	42
19	46392	26	85064	10	41
20	46418	25	85054	11	**40**
21	46443	25	85043	11	39
22	46468	26	85032	10	**38**
23	46494	26	85022	10	37
24	46520	25	85012	10	36
25	46545	25	85002	12	35
26	46570	25	84990	10	**34**
27	46595	26	84980	10	33
28	46621	25	84970	10	32
29	46646	25	84960	11	31
30	46671	25	84949	11	**30**
31	46696	26	84938	10	29
32	46722	25	84928	10	28
33	46747	26	84918	10	27
34	46773	24	84908	12	26
35	46797	26	84896	10	25
36	46823	25	84886	10	24
37	46848	25	84876	10	23
38	46873	25	84866	11	22
39	46898	25	84855	11	21
40	46923	25	84844	10	**20**
41	46948	25	84834	11	19
42	46973	25	84823	10	18
43	46998	26	84813	10	17
44	47024	24	84803	11	16
45	47048	25	84792	11	15
46	47073	25	84781	10	14
47	47098	25	84771	10	13
48	47123	25	84761	11	12
49	47148	25	84750	10	11
50	47173	25	84740	10	**10**
51	47198	24	84730	12	9
52	47222	25	84718	10	8
53	47247	25	84708	10	7
54	47272	25	84698	11	6
55	47297	25	84687	10	5
56	47322	24	84677	10	4
57	47246	25	84667	11	3
58	47371	25	84656	10	2
59	47396	24	84646	11	1
60	47420		84635		**0**
′	cp.		sp.		′

67°

23°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,47420	25	$\bar{1}$,84635	11	**60**
1	47445	24	84624	10	59
2	47469	25	84614	10	58
3	47494	25	84604	11	57
4	47519	24	84593	10	56
5	47543	25	84583	11	55
6	47568	25	84572	10	54
7	47593	24	84562	10	53
8	47617	25	84552	11	52
9	47642	24	84541	10	51
10	47666	25	84531	11	**50**
11	47691	23	84520	11	49
12	47714	25	84509	10	48
13	47739	24	84499	11	**47**
14	47763	25	84488	10	46
15	47788	24	84478	11	45
16	47812	24	84467	10	44
17	47836	25	84457	11	43
18	47861	24	84446	10	42
19	47885	24	84436	11	41
20	47909	25	84425	10	**40**
21	47934	24	84415	10	39
22	47958	24	84405	11	38
23	47982	24	84394	10	37
24	48006	24	84384	11	36
25	48030	25	84373	10	35
26	48055	24	84363	11	34
27	48079	24	84352	10	33
28	48103	24	84342	11	32
29	48127	24	84331	10	31
30	48151	24	84321	11	**30**
31	48175	24	84310	10	29
32	48199	24	84300	11	28
33	48223	24	84289	10	27
34	48247	24	84279	11	26
35	48271	24	84268	10	25
36	48295	24	84258	11	24
37	48319	25	84247	9	23
38	48344	24	84238	11	22
39	48368	23	84227	10	21
40	48391	24	84217	11	**20**
41	48415	24	84206	10	19
42	48439	24	84196	11	18
43	48463	23	84185	11	17
44	48486	24	84174	10	16
45	48510	24	84164	11	15
46	48534	24	84153	10	14
47	48558	23	84143	11	13
48	48581	24	84132	10	12
49	48605	24	84122	10	11
50	48629	24	84112	11	**10**
51	48653	24	84101	10	9
52	48677	23	84091	11	8
53	48700	24	84080	10	7
54	48724	23	84070	11	6
55	48747	24	84059	11	5
56	48771	23	84048	10	4
57	48794	25	84038	10	3
58	48819	23	84028	10	2
59	48842	23	84018	11	1
60	48865		84007		**0**
′	cp.		sp.		′

66°

24°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,48865	24	$\bar{1}$,84007	11	**60**
1	48889	23	83996	10	59
2	48912	23	83986	11	58
3	48935	24	83975	11	57
4	48959	24	83964	9	56
5	48983	23	83955	11	55
6	49006	23	83944	10	54
7	49029	24	83934	11	53
8	49053	23	83923	11	52
9	49076	24	83912	9	51
10	49100	23	83903	11	**50**
11	49123	23	83892	11	49
12	49146	23	83881	10	48
13	49169	23	83871	11	47
14	49192	24	83860	10	46
15	49216	23	83850	11	45
16	49239	24	83839	10	44
17	49263	22	83829	11	43
18	49285	23	83818	11	42
19	49308	24	83807	9	41
20	49332	23	83798	11	**40**
21	49355	23	83787	11	39
22	49378	23	83776	11	38
23	49401	24	83765	9	37
24	49425	23	83756	11	36
25	49448	23	83745	11	35
26	49471	22	83734	10	34
27	49493	24	83724	10	33
28	49517	23	83714	11	32
29	49540	23	83703	11	31
30	49563	23	83692	9	**30**
31	49586	23	83683	11	29
32	49609	23	83672	11	28
33	49632	22	83661	11	27
34	49654	24	83650	10	26
35	49678	23	83640	10	25
36	49701	22	83630	11	24
37	49723	24	83619	10	23
38	49747	22	83609	11	22
39	49769	23	83598	11	21
40	49792	23	83587	9	**20**
41	49815	23	83578	11	19
42	49838	22	83567	11	18
43	49860	24	83556	10	17
44	49884	22	83546	11	16
45	49906	23	83535	10	15
46	49929	23	83525	10	14
47	49952	22	83515	11	13
48	49974	23	83504	11	12
49	49997	23	83493	10	11
50	50020	22	83483	11	**10**
51	50042	22	83472	10	9
52	50064	24	83462	10	8
53	50088	22	83452	11	7
54	50110	22	83441	11	6
55	50132	23	83430	10	5
56	50155	22	83420	11	4
57	50177	24	83409	10	3
58	50201	22	83399	11	2
59	50223	22	83388	10	1
60	50245		83378		**0**
′	cp.		sp.		′

65°

25°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,50245	23	$\bar{1}$,83378	10	**60**
1	50268	22	83368	11	59
2	50290	23	83357	10	58
3	50313	22	83347	11	57
4	50335	22	83336	11	56
5	50357	23	83325	10	55
6	50380	22	83315	11	54
7	50402	23	83304	10	53
8	50425	22	83294	11	52
9	50447	23	83283	10	51
10	50470	22	83273	10	**50**
11	50492	22	83263	10	49
12	50514	22	83253	11	48
13	50536	22	83242	11	47
14	50558	23	83231	10	46
15	50581	22	83221	11	45
16	50603	22	83210	10	44
17	50625	22	83200	11	43
18	50647	23	83189	10	42
19	50670	22	83179	11	41
20	50692	22	83168	10	**40**
21	50714	22	83158	11	39
22	50736	23	83147	10	38
23	50759	21	83137	11	37
24	50780	23	83126	10	36
25	50803	21	83116	11	35
26	50824	23	83105	10	34
27	50847	21	83095	11	33
28	50868	23	83084	10	32
29	50891	21	83074	11	31
30	50912	23	83063	10	**30**
31	50935	21	83053	11	29
32	50956	23	83042	10	28
33	50979	21	83032	11	27
34	51000	23	83021	10	26
35	51023	22	83011	10	25
36	51045	21	83001	11	24
37	51066	23	82990	11	23
38	51089	21	82979	11	22
39	51110	22	82968	10	21
40	51132	22	82958	11	**20**
41	51154	22	82947	10	19
42	51176	22	82937	10	18
43	51198	21	82927	11	17
44	51219	23	82916	10	16
45	51242	21	82906	11	15
46	51263	22	82895	10	14
47	51285	21	82885	11	13
48	51306	22	82874	10	12
49	51328	22	82864	11	11
50	51350	21	82853	11	**10**
51	51371	22	82842	10	9
52	51393	22	82832	10	8
53	51415	21	82822	11	7
54	51436	22	82811	10	6
55	51458	21	82801	11	5
56	51479	22	82790	11	4
57	51501	22	82779	10	3
58	51523	21	82769	11	2
59	51544	22	82758	10	1
60	51566		82748		**0**
′	cp.		sp.		′

64°

26°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,51566	22	$\bar{1}$,82748	10	**60**
1	51588	21	82738	11	59
2	51609	22	82727	10	58
3	51631	22	82717	11	57
4	51653	20	82706	11	56
5	51673	22	82695	10	55
6	51695	22	82685	10	54
7	51717	21	82675	11	53
8	51738	22	82664	11	52
9	51760	21	82653	10	51
10	51781	21	82643	11	**50**
11	51802	22	82632	10	49
12	51824	21	82622	10	48
13	51845	21	82612	12	47
14	51866	22	82600	10	46
15	51888	21	82590	10	45
16	51909	22	82580	10	44
17	51931	20	82570	12	43
18	51951	22	82558	10	42
19	51973	21	82548	10	41
20	51994	22	82538	10	**40**
21	52016	20	82528	12	39
22	52036	22	82516	10	38
23	52058	21	82506	10	37
24	52079	22	82496	10	36
25	52101	20	82486	12	35
26	52121	22	82474	10	34
27	52143	21	82464	10	33
28	52164	21	82454	11	32
29	52185	21	82443	11	31
30	52206	21	82432	10	**30**
31	52227	21	82422	10	29
32	52248	22	82412	11	28
33	52270	20	82401	11	27
34	52290	21	82390	10	26
35	52311	21	82380	11	25
36	52332	22	82369	10	24
37	52354	21	82359	10	23
38	52375	20	82349	12	22
39	52395	21	82337	10	21
40	52416	21	82327	10	**20**
41	52437	21	82317	11	19
42	52458	22	82306	10	18
43	52480	21	82296	11	17
44	52501	20	82285	11	16
45	52521	21	82274	10	15
46	52542	21	82264	11	14
47	52563	21	82253	10	13
48	52584	21	82243	10	12
49	52605	21	82233	11	11
50	52626	20	82222	11	**10**
51	52646	21	82211	11	9
52	52667	21	82200	10	8
53	52688	21	82190	10	7
54	52709	20	82180	11	6
55	52729	21	82169	10	5
56	52750	21	82159	11	4
57	52771	21	82148	10	3
58	52792	20	82138	11	2
59	52812	21	82127	11	1
60	52833		82116		**0**
′	cp.		sp.		′

63°

27°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,52833	20	$\bar{1}$,82116	10	**60**
1	52853	21	82106	11	59
2	52874	21	82095	10	58
3	52895	21	82085	11	57
4	52916	20	82074	10	56
5	52936	21	82064	11	55
6	52957	21	82053	10	54
7	52978	20	82043	11	53
8	52998	21	82032	10	52
9	53019	21	82022	11	51
10	53040	19	82011	11	**50**
11	53059	21	82000	10	49
12	53080	20	81990	11	48
13	53100	21	81979	10	47
14	53121	21	81969	11	46
15	53142	20	81958	10	45
16	53162	21	81948	11	44
17	53183	20	81937	11	43
18	53203	21	81926	10	42
19	53224	20	81916	11	41
20	53244	20	81905	10	**40**
21	53264	21	81895	11	39
22	53285	20	81884	10	38
23	53305	21	81874	11	37
24	53326	20	81863	10	36
25	53346	20	81853	11	35
26	53366	21	81842	10	34
27	53387	20	81832	11	33
28	53407	20	81821	11	32
29	53427	21	81810	10	31
30	53448	20	81800	11	**30**
31	53468	20	81789	10	29
32	53488	20	81779	11	28
33	53508	20	81768	10	27
34	53528	21	81758	11	26
35	53549	20	81747	11	25
36	53569	20	81736	10	24
37	53589	20	81726	11	23
38	53609	20	81715	10	22
39	53629	20	81705	11	21
40	53649	20	81694	11	**20**
41	53669	22	81683	9	19
42	53691	20	81674	11	18
43	53711	20	81663	11	17
44	53731	20	81652	10	16
45	53751	20	81642	11	15
46	53771	20	81631	11	14
47	53791	20	81620	10	13
48	53811	20	81610	11	12
49	53831	19	81599	11	11
50	53850	20	81588	10	**10**
51	53870	20	81578	11	9
52	53890	21	81567	10	8
53	53911	20	81557	10	7
54	53931	20	81547	11	6
55	53951	20	81536	11	5
56	53971	20	81525	10	4
57	53991	19	81515	11	3
58	54010	20	81504	11	2
59	54030	20	81493	11	1
60	54050		81482		**0**
′	cp.		sp.		′

62°

28°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,54050	21	$\bar{1}$,81482	9	**60**
1	54071	19	81473	11	59
2	54090	20	81462	11	58
3	54110	20	81451	10	57
4	54130	20	81441	11	56
5	54150	19	81430	11	55
6	54169	20	81419	11	54
7	54189	20	81408	9	53
8	54209	20	81399	11	52
9	54229	20	81388	11	51
10	54249	19	81377	11	**50**
11	54268	20	81366	10	49
12	54288	19	81356	11	48
13	54307	21	81345	10	47
14	54328	19	81335	11	46
15	54347	20	81324	11	45
16	54367	19	81313	10	44
17	54386	20	81303	11	43
18	54406	20	81292	10	42
19	54426	20	81282	11	41
20	54446	19	81271	11	**40**
21	54465	20	81260	10	39
22	54485	20	81250	10	38
23	54505	19	81240	11	37
24	54524	20	81229	11	36
25	54544	19	81218	11	35
26	54563	20	81207	10	34
27	54583	20	81197	10	33
28	54603	19	81187	11	32
29	54622	19	81176	11	31
30	54641	21	81165	10	**30**
31	54662	19	81155	11	29
32	54681	19	81144	11	28
33	54700	19	81133	11	27
34	54719	20	81122	10	26
35	54739	20	81112	10	25
36	54759	19	81102	11	24
37	54778	19	81091	11	23
38	54797	20	81080	10	22
39	54817	19	81070	11	21
40	54836	19	81059	11	**20**
41	54855	20	81048	10	19
42	54875	19	81038	11	18
43	54894	19	81027	11	17
44	54913	20	81016	10	16
45	54933	20	81006	11	15
46	54953	19	80995	10	14
47	54972	20	80985	10	13
48	54992	18	80975	11	12
49	55010	19	80964	11	11
50	55029	20	80953	10	**10**
51	55049	19	80943	11	9
52	55068	19	80932	11	8
53	55087	20	80921	10	7
54	55107	19	80911	11	6
55	55126	19	80900	11	5
56	55145	20	80889	10	4
57	55165	19	80879	11	3
58	55184	18	80868	11	2
59	55202	20	80857	10	1
60	55222		80847		**0**
′	cp.		sp.		′

61°

29°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,55222	19	$\bar{1}$,80847	11	**60**
1	55241	20	80836	10	59
2	55261	18	80826	11	58
3	55279	19	80815	11	57
4	55298	20	80804	10	56
5	55318	19	80794	11	55
6	55337	19	80783	10	54
7	55356	19	80773	11	53
8	55375	19	80762	11	52
9	55394	19	80751	10	51
10	55413	19	80741	11	**50**
11	55432	19	80730	10	49
12	55451	19	80720	12	48
13	55470	20	80708	10	47
14	55490	18	80698	11	46
15	55508	19	80687	11	45
16	55527	19	80676	10	44
17	55546	19	80666	11	43
18	55565	19	80655	10	42
19	55584	19	80645	11	41
20	55603	19	80634	10	**40**
21	55622	19	80624	11	39
22	55641	19	80613	10	38
23	55660	19	80603	12	37
24	55679	19	80591	10	36
25	55698	18	80581	11	35
26	55716	19	80570	11	34
27	55735	19	80559	10	33
28	55754	19	80549	11	32
29	55773	19	80538	10	31
30	55792	18	80528	11	**30**
31	55810	20	80517	11	29
32	55830	18	80506	11	28
33	55848	19	80495	10	27
34	55867	18	80485	11	26
35	55885	20	80474	10	25
36	55905	19	80464	10	24
37	55924	18	80454	12	23
38	55942	19	80442	10	22
39	55961	18	80432	11	21
40	55979	20	80421	10	**20**
41	55999	18	80411	11	19
42	56017	19	80400	11	18
43	56036	18	80389	11	17
44	56054	19	80378	10	16
45	56073	18	80368	11	15
46	56091	19	80357	11	14
47	56110	19	80346	10	13
48	56129	18	80336	11	12
49	56147	19	80325	10	11
50	56166	18	80315	11	**10**
51	56184	19	80304	11	9
52	56203	18	80293	11	8
53	56221	19	80282	10	7
54	56240	19	80272	11	6
55	56259	18	80261	11	5
56	56277	19	80250	10	4
57	56296	18	80240	11	3
58	56314	19	80229	11	2
59	56333	19	80218	10	1
60	56352		80208		**0**
′	cp.		sp.		′

60°

30°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,56352	18	$\bar{1}$,80208	11	**60**
1	56370	19	80197	11	59
2	56389	18	80186	11	58
3	56407	18	80175	11	57
4	56425	19	80165	10	56
5	56444	18	80155	10	55
6	56462	19	80143	12	54
7	56481	19	80133	10	53
8	56500	17	80123	10	52
9	56517	19	80111	12	51
10	56536	19	80101	10	**50**
11	56555	18	80091	10	49
12	56573	18	80079	12	48
13	56591	19	80069	10	47
14	56610	18	80058	11	46
15	56628	18	80047	11	45
16	56646	19	80037	10	44
17	56665	17	80026	11	43
18	56682	19	80015	11	42
19	56701	19	80005	10	41
20	56720	17	79994	11	**40**
21	56737	19	79983	11	39
22	56756	18	79972	11	38
23	56774	19	79962	10	37
24	56793	17	79952	10	36
25	56810	19	79940	12	35
26	56829	18	79930	10	34
27	56847	18	79919	11	33
28	56865	18	79908	11	32
29	56883	19	79897	11	31
30	56902	18	79887	10	**30**
31	56920	18	79877	10	29
32	56938	18	79865	12	28
33	56956	19	79855	10	27
34	56975	18	79844	11	26
35	56993	17	79834	10	25
36	57010	19	79822	12	24
37	57029	18	79812	10	23
38	57047	18	79801	11	22
39	57065	18	79791	10	21
40	57083	18	79779	12	**20**
41	57101	18	79769	10	19
42	57119	18	79758	11	18
43	57137	18	79748	10	17
44	57155	18	79736	12	16
45	57173	18	79726	10	15
46	57191	18	79715	11	14
47	57209	19	79705	10	13
48	57228	17	79694	11	12
49	57245	18	79683	11	11
50	57263	18	79672	11	**10**
51	57281	18	79662	10	9
52	57299	18	79651	11	8
53	57317	19	79641	10	7
54	57336	17	79630	11	6
55	57353	18	79618	12	5
56	57371	18	79608	10	4
57	57389	18	79597	11	3
58	57407	18	79587	10	2
59	57425	18	79576	11	1
60	57443		79566	10	**0**
′	cp.		sp.		′

59°

31°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,57443	17	$\bar{1}$,79566	12	**60**
1	57460	18	79554	11	59
2	57478	18	79543	10	58
3	57496	18	79533	11	57
4	57514	18	79522	10	56
5	57532	18	79512	11	55
6	57550	18	79501	11	54
7	57568	18	79490	10	53
8	57586	18	79480	12	52
9	57603	17	79468	11	51
10	57620	17	79457	10	**50**
11	52638	18	79447	11	49
12	57656	18	79436	11	48
13	57674	18	79425	10	47
14	57692	18	79415	11	46
15	57710	18	79404	11	45
16	57728	18	79393	10	44
17	57745	17	79383	11	43
18	57763	18	79372	12	42
19	57780	17	89360	10	41
20	57798	18	79350	11	**40**
21	57815	17	79339	11	39
22	57833	18	79328	10	38
23	57851	18	79318	11	37
24	57869	18	79307	11	36
25	57886	17	79296	10	35
26	57904	18	79286	11	34
27	57922	18	79275	11	33
28	57939	17	79264	11	32
29	57957	18	69253	10	31
30	57975	18	79243	11	**30**
31	57992	17	79232	11	29
32	58010	18	79221	11	28
33	58027	17	79210	10	27
34	58045	18	79200	11	26
35	58062	17	79189	11	25
36	58080	18	79178	11	24
37	58097	17	79167	11	23
38	58115	18	79156	10	22
39	58133	18	79146	11	21
40	58150	17	79135	11	**20**
41	58167	17	79124	11	19
42	58185	18	79113	10	18
43	58202	17	79103	11	17
44	58220	18	79092	11	16
45	58237	17	79081	11	15
46	58255	18	79070	11	14
47	58272	17	79059	11	13
48	58289	17	79048	10	12
49	58307	18	79038	11	11
50	58324	17	79027	11	**10**
51	58341	17	79016	11	9
52	58359	18	79005	11	8
53	58376	17	78994	11	7
54	58393	17	78983	11	6
55	58411	18	78972	10	5
56	58428	17	78962	11	4
57	58445	17	78951	11	3
58	58463	18	78940	10	2
59	58581	18	78930	11	1
0	58498	17	78919		**0**
′	cp.		sp.		′

58°

32°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,58498	17	$\bar{1}$,78919	11	**60**
1	58515	17	78908	11	59
2	58532	18	78897	11	58
3	58550	17	78886	11	57
4	58567	17	78875	10	56
5	58584	17	78865	11	55
6	58601	17	78854	11	54
7	58618	17	78843	11	53
8	58635	18	78832	10	52
9	58653	17	78822	11	51
10	58670	18	78811	11	**50**
11	58688	17	78800	11	49
12	58705	17	78789	11	48
13	58722	17	78778	11	47
14	58739	17	78767	11	46
15	58756	17	78756	11	45
16	58773	18	78745	10	44
17	58791	17	78735	11	43
18	58808	17	78724	11	42
19	58825	17	78713	11	41
20	58842	17	78702	11	**40**
21	58859	17	78691	11	39
22	58876	18	78680	10	38
23	58894	16	78670	11	37
24	58910	17	78659	11	36
25	58927	17	78648	11	35
26	58944	17	78637	11	34
27	58961	17	78626	11	33
28	58978	18	78615	10	32
29	58996	17	78605	11	31
30	59013	16	78594	11	**30**
31	59029	17	78583	11	29
32	59046	17	78572	11	28
33	59063	18	78561	10	27
34	59081	17	78551	11	26
35	59098	16	78540	11	25
36	59114	17	78529	12	24
37	59131	18	78517	10	23
38	59149	17	78507	11	22
39	59166	16	78496	11	21
40	59182	17	78485	11	**20**
41	59199	18	78474	10	19
42	59217	16	78464	11	18
43	59233	17	78453	11	17
44	59250	17	78442	11	16
45	59267	17	78431	11	15
46	59284	17	78420	11	14
47	59301	17	78409	11	13
48	59318	16	78398	11	12
49	59334	18	78387	10	11
50	59352	16	78377	11	**10**
51	59368	17	78366	11	9
52	59385	16	78355	12	8
53	59401	18	78343	10	7
54	59419	16	78333	11	6
55	59435	17	78322	11	5
56	59452	17	78311	10	4
57	59469	17	78301	11	3
58	59486	16	78290	12	2
59	59502	18	78278	10	1
60	59520		78268		**0**
′	cp.		sp.		′

57°

33°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,59520	16	$\bar{1}$,78268	11	**60**
1	59536	17	78257	11	59
2	59553	17	78246	10	58
3	59570	17	78236	12	57
4	59587	16	78224	11	56
5	59603	17	78213	10	55
6	59620	17	78203	11	54
7	59637	16	78192	12	53
8	59653	17	78180	10	52
9	59670	17	78170	11	51
10	59687	16	78159	11	**50**
11	59703	17	78148	11	49
12	59720	17	78137	11	48
13	59737	16	78126	11	47
14	59753	17	78115	11	46
15	59770	17	78104	11	45
16	59787	16	78093	11	44
17	59803	17	78082	10	43
18	59820	16	78072	12	42
19	59836	17	78060	10	41
20	59853	17	78050	11	**40**
21	59870	16	78039	12	39
22	59886	17	78027	10	38
23	59903	16	78017	11	37
24	59919	17	78006	11	36
25	59936	17	77995	11	35
26	59953	16	77984	11	34
27	59969	17	77973	11	33
28	59986	16	77962	11	32
29	60002	17	77951	10	31
30	60019	16	77941	12	**30**
31	60035	17	77929	10	29
32	60052	16	77919	11	28
33	60068	16	77908	12	27
34	60084	17	77896	10	26
35	60101	16	77886	12	25
36	60117	17	77874	10	24
37	60134	16	77864	11	23
38	60150	17	77853	11	22
39	60167	16	77842	11	21
40	60183	17	77831	11	**20**
41	60200	16	77820	11	19
42	60216	17	77809	10	18
43	60233	16	77799	12	17
44	60249	17	77787	10	16
45	60266	16	77777	12	15
46	60282	17	77765	10	14
47	60299	16	77755	12	13
48	60315	16	77743	10	12
49	60331	16	77733	12	11
50	60347	17	77721	10	**10**
51	60364	16	77711	12	9
52	60380	17	77699	10	8
53	60397	16	77689	12	7
54	60413	16	77677	10	6
55	60329	16	77667	12	5
56	60445	17	77655	10	4
57	60462	16	77645	12	3
58	60478	16	77633	10	2
59	60494	16	77623	12	1
60	60510		77611		**0**
′	cp.		sp.		′

56°

34°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,60510	17	$\bar{1}$,77611	10	**60**
1	60527	16	77601	12	59
2	60543	16	77589	10	58
3	60559	17	77579	11	57
4	60576	16	77568	11	56
5	60592	16	77557	11	55
6	60608	16	77546	11	54
7	60624	17	77535	11	53
8	60641	15	77524	11	52
9	60656	17	77513	11	51
10	60673	16	77502	11	**50**
11	60689	16	77491	11	49
12	60705	17	77480	11	48
13	60722	15	77469	11	47
14	60737	17	77458	11	46
15	60754	16	77447	11	45
16	60770	16	77436	11	44
17	60786	16	77425	11	43
18	60802	16	77414	11	42
19	60818	16	77403	11	41
20	60834	17	77392	11	**40**
21	60851	15	77381	11	39
22	60866	17	77370	11	38
23	60883	16	77359	11	37
24	60899	16	77348	11	36
25	60915	16	77337	11	35
26	60931	16	77326	12	34
27	60947	16	77314	10	33
28	60963	16	77304	11	32
29	60979	16	77293	12	31
30	60995	16	77281	10	**30**
31	61011	17	77271	11	29
32	61028	15	77260	12	28
33	61043	16	77248	10	27
34	61059	17	77238	11	26
35	61076	15	77227	12	25
36	61091	16	77215	11	24
37	61107	16	77204	10	23
38	61123	16	77194	12	22
39	61139	16	77182	11	21
40	61155	16	77171	10	**20**
41	61171	17	77161	11	19
42	61188	15	77150	12	18
43	61203	16	77138	11	17
44	61219	16	77127	10	16
45	61235	15	77117	12	15
46	61250	17	77105	11	14
47	61267	16	77094	11	13
48	61283	16	77083	11	12
49	61299	15	77072	11	11
50	61314	16	77061	11	**10**
51	61330	16	77050	11	9
52	61346	17	77039	11	8
53	61363	15	77028	12	7
54	61378	16	77016	10	6
55	61394	16	77006	11	5
56	61410	16	76995	11	4
57	61426	15	76984	12	3
58	61441	16	76972	11	2
59	61457	16	76961	11	1
60	61473		76950		**0**
′	cp.		sp.		′

55°

35°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,61473	16	$\bar{1}$,76950	10	**60**
1	61489	15	76940	12	59
2	61501	16	76928	11	58
3	61520	16	76917	11	57
4	61536	16	76906	11	56
5	61552	16	76895	11	55
6	61568	15	76884	12	54
7	61583	16	76872	10	53
8	61599	16	76862	11	52
9	61615	16	76851	11	51
10	61631	16	76840	11	**50**
11	61647	15	76829	12	49
12	61662	16	76817	11	48
13	61678	16	76806	11	47
14	61694	16	76795	11	46
15	61710	15	76784	11	45
16	61725	16	76773	11	44
17	61741	15	76762	12	43
18	61756	16	76750	11	42
19	61772	16	76739	11	41
20	61788	16	76728	11	**40**
21	61804	15	76717	10	39
22	61819	16	76707	11	38
23	61835	15	76696	12	37
24	61850	16	76684	11	36
25	61866	15	76673	11	35
26	61881	16	76662	11	34
27	61897	16	76651	11	33
28	61913	16	76640	11	32
29	61929	15	76629	11	31
30	61944	16	76618	11	**30**
31	61960	16	76607	11	29
32	61976	14	76596	12	28
33	61990	16	76584	11	27
34	62006	16	76573	12	26
35	62022	15	76561	11	25
36	62037	16	76550	11	24
37	62053	16	76539	11	23
38	62069	15	76528	11	22
39	62084	16	76517	11	21
40	62100	16	76506	11	**20**
41	62116	15	76495	11	19
42	62131	16	76484	11	18
43	62147	15	76473	11	17
44	62162	15	76462	12	16
45	62177	15	76450	11	15
46	62192	16	76439	11	14
47	62208	15	76428	11	13
48	62223	16	76417	12	12
49	62239	15	76405	11	11
50	62254	16	76394	11	**10**
51	62270	15	76383	11	9
52	62285	16	76372	11	8
53	62301	15	76361	11	7
54	62316	16	76350	11	6
55	62332	15	76339	12	5
56	62347	16	76327	11	4
57	62363	15	76316	11	3
58	62378	15	76305	11	2
59	62393	16	76294	11	1
60	62409		76283		**0**
′	cp.		sp.		′

54°

36°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,62409	15	$\bar{1}$,76283	11	**60**
1	62424	16	76272	12	59
2	62440	15	76260	11	58
3	62455	15	76249	11	57
4	62470	16	76238	11	56
5	62486	15	76227	11	55
6	62501	15	76216	12	54
7	62516	16	76204	11	53
8	62532	15	76193	11	52
9	62547	15	76182	11	51
10	62562	15	76171	12	**50**
11	62577	16	76159	11	49
12	62593	15	76148	11	48
13	62608	15	76137	11	47
14	62623	15	76126	12	46
15	62638	16	76114	11	45
16	62654	16	76103	10	44
17	62670	15	76093	11	43
18	62685	15	76082	12	42
19	62700	16	76070	11	41
20	62716	15	76059	11	**40**
21	62731	15	76048	12	39
22	62746	15	76036	11	38
23	62761	15	76025	11	37
24	62776	15	76014	11	36
25	62791	15	76003	12	35
26	62806	15	75991	11	34
27	62821	16	75980	11	33
28	62837	16	75969	11	32
29	62853	15	75958	11	31
30	62868	15	75947	11	**30**
31	62883	15	75936	12	29
32	62898	15	75924	11	28
33	62913	15	75913	12	27
34	62928	15	75901	11	26
35	62943	15	75890	11	25
36	62958	16	75879	11	24
37	62974	15	75868	11	23
38	62989	15	75857	11	22
39	63004	15	75846	12	21
40	63019	15	75834	11	**20**
41	63034	15	75823	12	19
42	63049	15	75811	11	18
43	63064	16	75800	11	17
44	63080	15	75789	11	16
45	63095	15	75778	11	15
46	63110	15	75767	12	14
47	63125	14	75755	11	13
48	63139	15	75744	12	12
49	63154	16	75732	10	11
50	63170	15	75722	12	**10**
51	63185	15	75710	11	9
52	63200	15	75699	12	8
53	63215	15	75687	11	7
54	63230	15	75676	11	6
55	63245	15	75665	11	5
56	63260	15	75654	12	4
57	63275	15	75642	11	3
58	63290	15	75631	12	2
59	63305	15	75619	10	1
60	63320		75609		**0**
′	cp.		sp.		′

53°

37°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,63320	15	$\bar{1}$,75609	12	**60**
1	63335	15	75597	11	59
2	63350	15	75586	12	58
3	63365	15	75574	10	57
4	63380	15	75564	12	56
5	63395	15	75552	11	55
6	63410	14	75541	12	54
7	63424	16	75529	10	53
8	63440	15	75519	12	52
9	63455	14	75507	12	51
10	63469	15	75495	11	**50**
11	63484	16	75484	11	49
12	63500	14	75473	11	48
13	63514	15	75462	12	47
14	63529	16	75450	11	46
15	63545	14	75439	11	45
16	63559	15	75428	12	44
17	63574	14	75416	11	43
18	63588	16	75405	11	42
19	63604	15	75394	12	41
20	63619	14	75382	11	**40**
21	63633	16	75371	11	39
22	63649	14	75360	12	38
23	63663	15	75348	11	37
24	63678	15	75337	11	36
25	63693	15	75326	12	35
26	63708	14	75314	11	34
27	63722	15	75303	12	33
28	63737	15	75291	11	32
29	63752	15	75280	11	31
30	63767	14	75269	12	**30**
31	63781	16	75257	11	29
32	63797	14	75246	11	28
33	63811	15	75235	11	27
34	63826	15	75224	12	26
35	63841	14	75212	12	25
36	63855	16	75200	10	24
37	63871	14	75190	12	23
38	63885	14	75178	12	22
39	63899	16	75166	11	21
40	63915	14	75155	11	**20**
41	63929	15	75144	12	19
42	63944	15	75132	11	18
43	63959	14	75121	12	17
44	63973	16	75109	10	16
45	63989	14	75099	12	15
46	64003	14	75087	12	14
47	64017	15	75075	11	13
48	64032	15	75064	12	12
49	64047	15	75052	10	11
50	64062	14	75042	12	**10**
51	64076	15	75030	12	9
52	64091	15	75018	11	8
53	64106	14	75007	12	7
54	64120	15	74995	11	6
55	64135	14	74984	11	5
56	64149	16	74973	11	4
57	64165	14	74962	12	3
58	64179	14	74950	12	2
59	64193	15	74938	11	1
60	64208		74927		**0**
′	cp.		sp.		′

52°

38°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,64208	14	$\bar{1}$,74927	12	**60**
1	64222	16	74915	11	59
2	64238	14	74904	11	58
3	64252	15	74893	11	57
4	64267	14	74882	12	56
5	64281	15	74870	11	55
6	64296	14	74859	12	54
7	64310	15	74847	11	53
8	64325	14	74836	12	52
9	64339	15	74824	11	51
10	64354	14	74813	12	**50**
11	64368	16	74801	11	49
12	64384	14	74790	12	48
13	64398	15	74778	11	47
14	64413	14	74767	12	46
15	64427	15	74755	10	45
16	64442	14	74745	12	44
17	64456	15	74733	11	43
18	64471	14	74722	12	42
19	64485	15	74710	11	41
20	64500	14	74699	12	**40**
21	64514	15	74687	11	39
22	64529	14	74676	12	38
23	64543	14	74664	11	37
24	64557	14	74653	12	36
25	64571	15	74641	11	35
26	64586	14	74630	12	34
27	64600	15	74618	11	33
28	64615	15	74607	12	32
29	64630	14	74595	12	31
30	64644	15	74583	11	**30**
31	64659	14	74572	12	29
32	64673	15	74560	11	28
33	64688	13	74549	12	27
34	64701	15	74537	11	26
35	64716	15	74526	11	25
36	64731	14	74515	12	24
37	64745	15	74503	11	23
38	64760	14	74492	12	22
39	64774	14	74480	11	21
40	64788	14	74469	12	**20**
41	64802	15	74457	12	19
42	64817	15	74445	11	18
43	64832	13	74434	12	17
44	64845	15	74422	11	16
45	64860	15	74411	11	15
46	64875	14	74400	12	14
47	64889	14	74388	11	13
48	64903	14	74377	13	12
49	64917	15	74364	11	11
50	64932	14	74353	11	**10**
51	64946	14	74342	12	9
52	64960	15	74330	11	8
53	64975	14	74319	11	7
54	64989	14	74308	13	6
55	65003	15	74295	11	5
56	65018	14	74284	11	4
57	65032	14	74273	12	3
58	65046	15	74261	12	2
59	65061	14	74249	11	1
60	65075		74238		**0**
′	cp.		sp.		′

51°

39°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,65075	14	$\bar{1}$,74238	12	**60**
1	65089	14	74226	11	59
2	65103	15	74215	11	58
3	65118	14	74204	13	57
4	65132	14	74191	11	56
5	65146	15	74180	11	55
6	65161	13	74169	13	54
7	65174	15	74156	11	53
8	65189	14	74145	11	52
9	65203	14	74134	12	51
10	65217	14	74122	12	**50**
11	65231	15	74110	11	49
12	65246	14	74099	11	48
13	65260	14	74088	13	47
14	65274	14	74075	11	46
15	65288	15	74064	11	45
16	65303	14	74053	12	44
17	65317	13	74041	12	43
18	65330	15	74029	11	42
19	65345	14	74018	12	41
20	65359	15	74006	11	**40**
21	65374	13	73995	12	39
22	65387	15	73983	12	38
23	65402	14	73971	11	37
24	65416	14	73960	11	36
25	65430	14	73949	13	35
26	65444	14	73936	11	34
27	65458	14	73925	12	33
28	65472	15	73913	11	32
29	65487	13	73902	12	31
30	65500	14	73890	12	**30**
31	65514	15	73878	11	29
32	65529	14	73867	12	28
33	65543	14	73855	11	27
34	65557	14	73844	13	26
35	65571	14	73831	11	25
36	65585	14	73820	11	24
37	65599	14	73809	12	23
38	65613	15	73797	11	22
39	65628	13	73786	13	21
40	65641	14	73773	11	**20**
41	65655	14	73762	12	19
42	65669	15	73750	11	18
43	65684	14	73739	12	17
44	65698	14	73727	11	16
45	65712	13	73716	13	15
46	65725	14	73703	11	14
47	65739	14	73692	12	13
48	65753	15	73680	11	12
49	65768	14	73669	12	11
50	65782	14	73657	11	**10**
51	65796	14	73646	12	9
52	65810	13	73634	13	8
53	65823	14	73621	11	7
54	65837	14	73610	12	6
55	65851	14	73598	11	5
56	65865	15	73587	12	4
57	65880	14	73575	11	3
58	65894	14	73564	12	2
59	65908	14	73552	12	1
60	65922		73540		**0**
′	cp.		sp.		′

50°

40°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,65922	13	$\bar{1}$,73540	12	**60**
1	65935	14	73528	12	59
2	65949	14	73516	11	58
3	65963	14	73505	12	57
4	65977	14	73493	12	56
5	65991	14	73481	11	55
6	66005	14	73470	12	54
7	66019	14	73458	12	53
8	66033	14	73446	11	52
9	66047	14	73435	12	51
10	66061	14	73423	12	**50**
11	66075	14	73411	11	49
12	66089	14	73400	12	48
13	66103	13	73388	13	47
14	66116	14	73375	11	46
15	66130	14	73364	12	45
16	66144	13	73352	12	44
17	66157	14	73340	11	43
18	66171	14	73329	12	42
19	66185	14	73317	12	41
20	66199	14	73305	12	**40**
21	66213	14	73293	11	39
22	66227	14	73282	12	38
23	66241	14	73270	12	37
24	66255	13	73258	12	36
25	66268	14	73246	11	35
26	66282	14	73235	12	34
27	66296	14	73223	12	33
28	66310	14	73211	12	32
29	66324	13	73199	11	31
30	66337	14	73188	12	**30**
31	66351	14	73176	12	29
32	66365	14	73164	12	28
33	66379	14	73152	12	27
34	66393	13	73140	11	26
35	66406	14	73129	12	25
36	66420	14	73117	12	24
37	66434	13	73105	12	23
38	66447	14	73093	12	22
39	66461	14	73081	12	21
40	66475	14	73069	12	**20**
41	66489	13	73057	11	19
42	66502	14	73046	12	18
43	66516	15	73034	11	17
44	66531	13	73023	12	16
45	66544	14	73011	12	15
46	66558	14	72999	12	14
47	66572	13	72987	12	13
48	66585	14	72975	12	12
49	66599	14	72963	12	11
50	66613	13	72951	11	**10**
51	66626	14	72940	12	9
52	66640	13	72928	12	8
53	66653	14	72916	12	7
54	66667	14	72904	12	6
55	66681	13	77892	12	5
56	66694	15	72880	11	4
57	66709	13	72869	12	3
58	66722	14	72857	12	2
59	66736	13	72845	12	1
60	66749		72833		**0**
′	cp.		sp.		′

49°

41°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,66749	14	$\bar{1}$,72833	12	**60**
1	66763	13	72821	12	59
2	66776	14	72809	12	58
3	66790	13	72797	12	57
4	66803	15	72785	11	56
5	66818	13	72774	12	55
6	66831	14	72762	12	54
7	66845	13	72750	12	53
8	66858	14	72738	12	52
9	66872	13	72726	12	51
10	66885	14	72714	12	**50**
11	66899	14	72702	11	49
12	66913	13	72691	12	48
13	66926	14	72679	12	47
14	66940	13	72667	12	46
15	66953	14	72655	13	45
16	66967	13	72642	12	44
17	66980	15	72630	11	43
18	66995	13	72619	12	42
19	67008	13	72607	12	41
20	67021	14	72595	12	**40**
21	67035	13	72583	12	39
22	67048	14	72571	11	38
23	67062	14	72560	12	37
24	67076	13	72548	13	36
25	67089	13	72535	12	35
26	67102	14	72523	12	34
27	67116	14	72511	11	33
28	67130	13	72500	12	32
29	67143	13	72488	12	31
30	67156	14	72476	13	**30**
31	67170	14	72463	11	29
32	67184	13	72452	12	28
33	67197	14	72440	12	27
34	67211	13	72428	12	26
35	67224	14	72416	12	25
36	67238	13	72404	12	24
37	67251	13	72392	12	23
38	67264	14	72380	12	22
39	67278	14	72368	11	21
40	67292	13	72357	13	**20**
41	67305	13	72344	12	19
42	67318	13	75332	12	18
43	67331	15	72320	12	17
44	67346	13	72308	12	16
45	67359	13	72296	12	15
46	67372	13	72284	12	14
47	67385	14	72272	12	13
48	67399	13	72260	12	12
49	67412	13	72248	12	11
50	67425	14	72236	12	**10**
51	67439	14	72224	12	9
52	67453	13	72212	12	8
53	67466	14	72200	12	7
54	67480	13	72188	12	6
55	67493	13	72176	12	5
56	67506	14	72164	12	4
57	67520	13	72152	12	3
58	67533	13	72140	12	2
59	67546	14	72128	12	1
60	67560		72116		**0**
′	cp.		sp.		′

48°

42°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,67560	13	$\bar{1}$,72116	12	60
1	67573	13	72104	12	59
2	67586	14	72092	12	58
3	67600	13	72080	12	57
4	67613	13	72068	13	56
5	67626	14	72055	11	55
6	67640	13	72044	12	54
7	67653	13	72032	13	53
8	67666	14	72019	11	52
9	67680	13	72008	13	51
10	67693	13	71995	12	**50**
11	67706	14	71983	12	49
12	67720	13	71971	12	48
13	67733	14	71959	12	47
14	67747	13	71947	12	46
15	67760	13	71935	13	45
16	67773	13	71922	11	44
17	67786	13	71911	12	43
18	67799	14	71899	12	42
19	67813	13	71887	12	41
20	67826	13	71875	13	**40**
21	67839	14	71862	12	39
22	67853	13	71850	12	38
23	67866	13	71838	12	37
24	67879	13	71826	12	36
25	67892	14	71814	12	35
26	67906	13	71802	12	34
27	67919	13	71790	13	33
28	67932	14	71777	11	32
29	67946	12	71766	13	31
30	67958	14	71753	11	**30**
31	67972	13	71742	13	29
32	67985	14	71729	12	28
33	67999	12	71717	12	27
34	68011	14	71705	12	26
35	68025	13	71693	12	25
36	68038	14	71681	12	24
37	68052	12	71669	13	23
38	68064	14	71656	11	22
39	68078	13	71645	13	21
40	68091	14	71632	12	**20**
41	68105	12	71620	12	19
42	68117	13	71608	13	18
43	68130	14	71595	12	17
44	68144	12	71583	12	16
45	68156	14	71571	12	15
46	68170	14	71559	12	14
47	68184	12	71547	12	13
48	68196	14	71535	12	12
49	68210	12	71523	13	11
50	68222	14	71510	12	**10**
51	68236	13	71498	12	9
52	68249	13	71486	13	8
53	68262	13	71474	11	7
54	68275	13	71461	13	6
55	68288	13	71450	12	5
56	68301	14	71437	13	4
57	68315	12	71425	11	3
58	68327	14	71412	13	2
59	68341	12	71401	13	1
60	68353		71388		**0**
′	cp.		sp.		′

47°

43°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,68353	14	$\bar{1}$,71388	12	**60**
1	68367	13	71376	12	59
2	68380	13	71364	13	58
3	68393	13	71351	11	57
4	68406	13	71340	13	56
5	68419	13	71327	12	55
6	68432	13	71315	13	54
7	68445	13	71302	12	53
8	68458	14	71290	12	52
9	68472	12	71278	12	51
10	68484	14	71266	12	**50**
11	68498	12	71254	13	49
12	68510	14	71241	12	48
13	68524	13	71229	12	47
14	68537	13	71217	13	46
15	68550	13	71204	12	45
16	68563	13	71192	13	44
17	68576	13	71179	11	43
18	68589	13	71168	12	42
19	68602	13	71156	13	41
20	68615	13	71143	12	**40**
21	68628	13	71131	12	39
22	68641	13	71119	13	38
23	68654	13	71106	12	37
24	68667	14	71094	12	36
25	68681	12	71082	13	35
26	68693	13	71069	12	34
27	68706	14	71057	12	33
28	68720	12	71045	13	32
29	68732	13	71032	12	31
30	68745	14	71020	12	**30**
31	68759	12	71008	13	29
32	68771	13	70995	12	28
33	68784	13	70983	12	27
34	68797	13	70971	13	26
35	68810	13	70958	12	25
36	68823	13	70946	12	24
37	68836	12	70934	13	23
38	68848	14	70921	12	22
39	68862	13	70909	12	21
40	68875	12	70897	13	**20**
41	68887	13	70884	12	19
42	68900	14	70872	12	18
43	68914	13	70860	12	17
44	68927	12	70848	13	16
45	68939	13	70835	12	15
46	68952	13	70823	13	14
47	68965	14	70810	12	13
48	68979	12	70798	13	12
49	68991	13	70785	12	11
50	69004	13	70773	12	**10**
51	69017	12	70761	13	9
52	69029	13	70748	12	8
53	69042	13	70736	13	7
54	69055	14	70723	12	6
55	69069	13	70711	12	5
56	69082	12	70699	13	4
57	69094	13	70686	12	3
58	69107	13	70674	12	2
59	69120	13	70662	13	1
60	69133		70649		**0**
′	cp.		sp.		′

46°

′	sp.	D	cp.	D	′
0	$\bar{1}$,69133	12	$\bar{1}$,70649	13	**60**
1	69145	13	70636	12	59
2	69158	13	70624	12	58
3	69171	13	70612	12	57
4	69184	13	70600	13	56
5	69197	12	70587	13	55
6	69209	14	70574	12	54
7	69223	13	70562	12	53
8	69236	13	70550	13	52
9	69249	13	70537	12	51
10	69262	12	70525	13	**50**
11	69274	13	70512	12	49
12	69287	13	70500	13	48
13	69300	13	70487	12	47
14	69313	13	70475	12	46
15	69326	12	70463	13	45
16	69338	12	70450	13	44
17	69350	13	70437	12	43
18	69363	13	70425	13	42
19	69376	13	70412	12	41
20	69389	13	70400	12	**40**
21	69402	13	70388	13	39
22	69415	13	70375	12	38
23	69428	12	70363	13	37
24	69440	13	70350	13	36
25	69453	13	70337	12	35
26	69466	13	70325	13	34
27	69479	12	70312	12	33
28	69491	13	70300	12	32
29	69504	13	70288	13	31
30	69517	13	70275	12	**30**
31	69530	12	70263	14	29
32	69542	13	70249	12	28
33	69555	13	70237	13	27
34	69568	12	70224	12	26
35	69580	13	70212	12	25
36	69593	13	70200	13	24
37	69606	13	70187	12	23
38	69619	13	70175	13	22
39	69632	12	70162	12	21
40	69644	13	70150	13	**20**
41	69657	13	70137	12	19
42	69670	13	70125	13	18
43	69683	11	70112	13	17
44	69694	13	70099	13	16
45	69707	13	70086	12	15
46	69720	13	70074	13	14
47	69733	12	70061	12	13
48	69745	13	70049	13	12
49	69758	13	70036	13	11
50	69771	13	70023	12	**10**
51	69784	12	70011	13	9
52	69796	13	69998	12	8
53	69809	13	69986	13	7
54	69822	12	69973	12	6
55	69834	13	69961	13	5
56	69847	13	69948	13	4
57	69860	12	69935	12	3
58	69872	13	69923	13	2
59	69885	13	69910	12	1
60	69898		69898		**0**
′	cp.		sp.		′

ANUL XIX IANUARIE 1940 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **DR. ERICH STERN:** AU SUJET DES PRODUITS MAGIQUES ET PANMAGIQUES.
2. **V. ALACI:** TRANSFORMAREA ROMBICA SI ANTIROMBICA. TRANSFORMARILE $(O\ A, \varphi)$.
2. NOTE MATEMATICE: 13, 14, 15.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 531.
5. PROBLEME PROPUSE: 1809-1816.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XIX — No. 11 TIMISOARA, IANUARIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

AU SUJET DES PRODUITS MAGIQUES ET PANMAGIQUES.

PAR LE DR. ERICH STERN
(AMSTERDAM)

I.

Dans le No. 4 de la *Revista Matematică din Timișoara* XIX (1939) pp. 49—52, j'ai exposé quelques méthodes simples pour construire des *Carrés à produits magiques*, c'est à dire des carrés de nombres, dans lesquels le produit des termes de chaque rangée, colonne et diagonale est le même. Contrairement aux *carrés magiques* ordinaires, dans lesquels la *somme* des termes de chacune de ces lignes est constante, les carrés à produits magiques ne peuvent pas se construire avec des nombres consécutifs. Si l'on n'apporte aucune restriction au choix des nombres, le problème n'est qu'une amusante récréation. Mais si l'on s'impose de ne prendre que des nombres entiers et positifs, tous différents, le problème soulève d'intéressantes questions touchant la théorie des nombres.

A la suite de l'article précité, divers mathématiciens et amateurs m'ont demandé des éclaircissements sur les points suivants: Le problème des carrés a produits magiques a t'il déjà été traité dans quelques publications? La méthode indiquée dans l'article pour les carrés des côtés 3 et 4 s'applique t'elle en général? Y a t'il d'autres méthodes? Pour un carré de côté donné, comment obtient-on *le plus petit produit magique possible?* Quelles sont les conditions exigées, pour que ces carrés présentent aussi des produits magiques sur les diagonales dites brisées?

Je veux brièvement répondre à ces questions. Il est entendu que nos carrés seront tous composés avec des nombres entiers, positifs et différents.

II.

Soit un carré magique ordinaire à constante S, somme des termes de chaque ligne; si nous considérons ces termes comme les exposants d'une base quelconque B, nous avons un carré à produit magique $P = B^S$.

Si le côté du carré est n, S est égal à la n^e partie de la somme de tous les termes composant le carré de départ.

Si le carré est composé des nombres 0 à n^2-1, $S = \frac{n(n^2-1)}{2}$; pour $n=3$, $S=12$ et pour $n=4$, $S=30$.

S'il est composé des nombres 1 à n^2, $S = \frac{n(n^2+1)}{2}$, et alors pour $n=3$ et 4, S prend les valeurs 15 et 34.

Dans ces cas les nombres du carré à produits magiques forment une progression géométrique avec le quotient B et avec le terme initial 1 ou B.

Les plus petites valeurs qu'on peut prendre pour B, sont 2 et 3.

De tels carrés à produits magiques, composés avec des puissances de 2 ou 3, se rencontrent dans de nombreux ouvrages sur les carrés magiques[1]. Ils ne constituent qu'une classe spéciale des carrés à produits magiques et présentent déjà pour les plus petites valeurs de n de très grands

[1]) M. STIFEL, *Arithmetica integra* (Nürnberg 1544), pp. 29 sqq., donne un exemple pour $n=3$, $P=2^{12}$, et un autre pour $n=4$, $P=2^{30}$.

D. SCHWENTER, *Deliciae Physico-Mathematicae* (Nürnberg 163[illegible]), présente p. 102 un exemple pour $n=4$, $P=2^{34}$ et un autre pour $n=5$, $P=3^{65}$. Il semble qu'on n'est pas aperçu jusqu'à maintenant que ce dernier carré contient neuf nombres injustes. Il est facile de les rectifier quand on a retrouvé la méthode par laquelle le carré est formé. On voit immédiatement que Schwenter est parti du carré magique ordinaire ci-joint; dans celui-ci chaque rangée, colonne et diagonale donne la somme 65. (D'ailleurs les neuf nombres centraux forment un carré magique avec

produits. Dans mon article précédent (voir la fig. 10), j'ai développé pour $n = 3$ une méthode, qui donne des carrés présentants le plus petit produit magique possible $6^3 = 216$.

On peut procéder d'une façon analogue dans le cas où $n = 4$. Prenons, par exemple, les deux

a_1	a_2	a_3	a_4
a_4	a_3	a_2	a_1
a_2	a_1	a_4	a_3
a_3	a_4	a_1	a_2

Fig. I.

b_1	b_2	b_3	b_4
b_3	b_4	b_1	b_2
b_4	b_3	b_2	b_1
b_2	b_1	b_4	b_3

Fig. II.

carrés A et B, représentés par *fig. I.* et *fig. II.* Par la multiplication de ces deux abaques, nous aurons un carré à produit magique $a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4$.[2]

En posant, par exemple,

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1$$
$$a_2 = 2 \qquad b_2 = 5$$
$$a_3 = 3 \qquad b_3 = 6$$
$$a_4 = 4 \qquad b_4 = 7$$

on a le carré *fig. III.* à produit magique $7! = 5040$.

1	10	18	28
24	21	2	5
14	6	20	3
15	4	7	12

Fig. III.

Dans les carrés de ce type,[3] outre les rangées, colonnes et diagonales, il y a plusieurs autres groupes de 4 termes, qui donnent le produit magique: par exemple, les 4 termes centraux, les 4 termes des compartiments formés par les deux médianes, etc. On constate que les 4 cases de ces groupes dans les deux carrés auxiliaires sont occupées par 4 nombres différents.

1	10	21	32	54
24	36	6	5	14
30	7	16	27	4
18	3	20	42	8
28	48	9	2	15

Fig IV.

Comme exemple pour le cas $n = 5$, nous donnons dans la *fig. IV.* un carré de 25 cases, à produit

---

la constante 39). On retrouve la carré de Schwenter,

8	25	23	7	2
22	12	17	10	4
5	11	13	15	21
6	16	9	14	20
24	1	3	19	18

si dans le carré ci-joint on remplace chaque nombre z par le nombre correspondant 3^z. Mais les nombres 3^{14} et 3^{15} sont injustes dans le dernier chiffre et également le nombre 3^{18} dans le chiffre qui précède l'avant-dernier. Ces erreurs peuvent être des fautes d'imprimerie. Cependant les nombres 3^{20} jusqu'à 3^{25} sont sûrement faussement calculés. Pour 3^{20} Schwenter pose 3 487 784 401 (au lieu de 3 486 784 401) et évidemment, il en a dérivé tous les nombres suivants en multipliant successivement par 3; en conséquence les nombres ainsi obtenus sont également faux.

J. OZANAM, *Récréations Mathématiques et Physiques* (Vol. I.), reproduit dans la 3me Edition (Amsterdam 1698) p. 40, l'exemple donné par Stifel pour $n = 3$; dans la 4me (Paris 1723), il ajoute deux autres exemples, savoir un avec $P = 3^{15}$ (p. 99) et un avec $P = 3^{31}$ (p. 100); ce dernier est composé des nombres $3^0, 3^7, \ldots, 3^{14}$. Plus loin, il donne (p. 101) un exemple pour $n = 4$, avec $P = 2^{31}$.

J. W. MUELLER, *Auserlesene mathematische Bibliothek* (Nürnberg 1820) p. 228, démontre la méthode générale par l'exemple $n = 3$, $P = 2^{15}$.

C. B. MOLLWEIDE a donné dans G. S KLUEGEL's *Mathematisches Wörterbuch.* I Abt, 4. Teil (Leipzig 1823) p. 44 deux exemples pour $n = 3$, $P = 2^{12}$ et $n = 4$, $P = 2^{30}$.

S. GUENTHER reproduit dans *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften* (Leipzig 1876), p. 228, les deux carrés de Stifel.

W. W. ROUSE BALL, *Mathematical Recreations and Essays* (7th ed. London 1917) donne p. 154 (Fig. XIV) l'exemple de Stifel pour $n = 4$, $P = 2^{31}$.

H. SCHUBERT, *Mathematische Mussestunden* (5e Aufl., par F. FITTING, Berlin 1935), donne p. 152 un exemple pour $n = 3$, $P = 2^{15}$.

[2]) En donnant aux éléments de A les valeurs 1, 6, 7, 277, et à ceux de B les valeurs 1/5, 5, 1/2, 1/3, on obtient les carrés auxiliaires des fig. 12 et 13 de mon précédent article, dont la multiplication terme à terme fournit le carré (fig 11), dont le produit magique est 1939.

[3]) M. le général *Cazalas* m'a fait observer que E. BARBETTE, dans son livre (que je n'ai malheureusement pas pu consulter), *Les Carrés magiques du me ordre* (Liège-Paris 1912), p. 242, a déjà fait usage d'un procédé analogue, utilisant des carrés auxiliaires du même genre, mais en prenant des nombres beaucoup plus élevés, ce qui donne des produits magiques beaucoup plus grands; il appelle ces carrés, dont les termes sont des nombres en progression géométrique, *carrés magiques géométriques.*

magique $9! = 362\,880$. Il s'obtient par la multiplication des deux carrés auxiliaires *fig. V.* et *fig. VI.*

1	2	3	4	6
3	4	6	1	2
6	1	2	3	4
2	3	4	6	1
4	6	1	2	3

Fig. V.

1	5	7	8	9
8	9	1	5	7
5	7	8	9	1
9	1	5	7	8
7	8	9	1	5

Fig. VI.

III.

Dans les abaques fig. I., II., V. et VI., les n éléments différents les uns des autres sont répartis de telle sorte que chacun d'eux apparait une fois et une fois seulement dans chaque rangée, colonne et diagonale. Ces carrés portent le nom de *carrés latins* diagonaux.

Si par la superposition de deux carrés latins chaque élément de l'un d'eux se rencontre une fois avec chacun des éléments de l'autre (comme c'est le cas dans les exemples, que nous avons choisis), on dit qu'on a formé un *carré Eulérien.*[4])

Un de mes amis (qui est d'ailleurs un mathématicien distingué) m'écrit à ce sujet: „Le problème se rattache intimement aux carrés euleriens. Les plus petits nombres positifs donnent évidemment comme produit magique, $P = (2n-1)!$"

Cela ne s'applique qu'aux cas où $n = 4$ ou 5. En effet, on ne peut pas choisir sans restrictions les nombres des deux abaques, ni les répartir à volonté sur les deux carrés auxiliaires. Pour qu'il n'y ait pas de répétitions dans l'association des abaques, il faut en outre que la condition suivante soit satisfaite:

$$\frac{a_t}{a_u} \neq \frac{b_v}{b_w}$$

$t, u, v, w = 1, 2, \ldots, n$ dans un ordre quelconque).

Quand $n > 5$, cette condition ne peut pas être remplie avec les nombres $1, 1, 2, 3, \ldots, 2n-1$. Alors, pour $n = 7$, par exemple, le plus petit produit magique est plus grand que 13! Même en prenant des nombres de 2 à 14, ou à 5, ou à 16, on ne peut pas trouver deux combinaisons de 6 nombres (à chacune desquelles on adjoint le nombre 1) satisfaisant à la condition exigée.

Mais si l'on va jusqu'au nombre premier 17, qui suit 13, dans la suite des nombres premiers, on peut former un carré auxiliaire *(fig. VII.)* avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 et un autre *(fig. VIII.)*

1	2	3	4	5	6	10
3	4	5	6	10	1	2
5	6	10	1	2	3	4
10	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	10	1
4	5	6	10	1	2	3
6	10	1	2	3	4	5

Fig. VII.

1	7	8	9	11	13	17
9	11	13	17	1	7	8
17	1	7	8	9	11	13
8	9	11	13	17	1	7
13	17	1	7	8	9	11
7	8	9	11	13	17	1
11	13	17	1	7	8	9

Fig. VIII.

1	14	24	36	55	78	170
27	44	65	102	10	7	16
85	6	70	8	18	33	52
80	9	22	39	68	5	42
26	51	4	35	48	90	11
28	40	54	110	3	34	3
66	130	17	2	21	32	45

Fig. IX.

avec 1, 7, 8, 9, 11, 13, 17. Ils donnent le carré de 49 cases *fig. IX.* avec le produit magique

$$\frac{17!}{12 \times 14 \times 15 \times 16} = \frac{13! \times 17}{12} = 8\,821\,612\,000.$$

[4]) Sur des diverses méthodes de former des carrés latins et eulériens et sur le nombre des carrés magiques, qui en découlent, voir mes articles *Ueber irreguläre pandiagonale lateinische Quadrate mit Primzahlseitenlänge und ihre Bedeutung für das n-Königinnenproblem sowie für die Bildung magischer Quadrate,* dans *Nieuw Archief voor Wiskunde,* XIX (1938), pp. 257—271, et *General formulas for the number of magic squares belonging to certain classes,* dans *The American Mathematical Monthly,* XLVI, (1939), pp. 555—581, ainsi qu'un article à paraître dans *Christiaan Huygens* sous le titre de *Ueber eine zahlentheoretische Methode zur Bildung und Anzahlbestimmung neuartiger lateinischer Quadrate.*

IV.

Le procédé exposé ci-dessus n'est pas applicable aux carrés de côté $n = 4k + 2$, parce que, dans ce cas, il n'existe pas de carrés eulériens. Nous allons appliquer une autre méthode sur l'exemple $n = 6$.

Dans ce but, nous formerons *trois* carrés auxiliaires, savoir:

A. un carré latin diagonal de *six* nombres différents, *fig. X.*;

1	5	7	8	9	11
5	7	11	1	8	9
8	1	9	5	11	7
9	8	1	11	7	5
11	9	8	7	5	1
7	11	5	9	1	8

A. Fig. X.

B. un carré, où n'entrent que *trois* éléments différents a, b, c, — et dont les 4 quartiers, chacun considéré à part, sont des carrés latins de 9 cases, qui se déduisent les uns des autres par symétrie par rapport aux deux médianes; pour les trois éléments, nous choisirons des valeurs telles qu'on ait $ac = b^2$ et que, par conséquent, les deux diagonales donnent le produit $a^3 b^3 c^3 = b^6$; en prenant $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, on obtient la *fig. XI.*;

2	1	4	4	1	2
4	2	1	1	2	4
1	4	2	2	4	1
1	4	2	2	4	1
4	2	1	1	2	4
2	1	4	4	1	2

B. Fig. XI.

1	3	1	3	3	1
1	1	3	3	1	3
3	3	1	1	1	3
1	1	3	3	3	1
3	3	1	1	3	1
3	1	3	1	1	3

C. Fig. XII

C. un carré composé à l'aide de *deux* nombres différents *(fig. XII.)*, dans lequel quatre cases, symétriques par rapport au deux médianes, sont occupées par deux paires de nombres égaux, en s'assurant en outre:

a. que dans chaque rangée, colonne et diagonale, chacun des deux nombres figure trois fois;

b. que deux nombres égaux de A, qui correspondent dans B à des nombres égaux, correspondent dans C à des nombres différents.[5]

Comme B donne le produit magique 2^6 et C le produit magique 3^3, la multiplication de ces deux carrés auxiliaires donne le carré B C *(fig. XIII.)* à produit magique 12^3.

2	3	4	12	3	2
4	2	3	3	2	12
3	12	2	2	4	3
1	4	6	6	12	1
12	6	1	1	6	4
6	1	12	4	1	6

BC. Fig. XIII.

2	15	28	96	27	22
20	14	33	3	16	108
24	12	18	10	44	21
9	32	6	66	84	5
132	54	8	7	30	4
42	11	60	36	1	48

ABC. Fig. XIV.

En multipliant ce dernier par A, on obtient le carré *fig. XIV*, composé de 36 nombres différents et dont le produit magique est

$$\frac{12!}{10} = 47\,900\,160.$$

S'il existait des carrés eulériens pour $n = 6$, on n'obtiendrait pas de produit magique plus petit.

(à suivre)

---

[5]) Pour la réalisation de ces conditions, il y a des règles qui évitent tout tâtonnement. On peut faire usage de certains procédés auxiliaires, qui servent aussi à la construction des carrés magiques ordinaires. J'ai brièvement exposé la théorie de ces procédés dans mon *Bericht über Studien zu einer allgemeinen mathematischen Theorie der magischen Quadrate*, dans les *Comptes-Rendus du IIe Congrès International de Récréation mathématique* (Paris 1937), pp. 88—94 (réédité dans la Revue *Sphinx* VIII (1938), pp. 62–69); j'ai montré leur application pratique à des cas spéciaux, dans mon article *Nouvelle Méthode pour construire et dénombrer certains carrés magiques d'ordre 4 m, avec application aux Parcours magiques*, dans *Sphinx* VII (1937), pp. 123—140.

TRANSFORMAREA ROMBICĂ ŞI ANTIROMBICĂ.- TRANSFORMĂRILE $(\overline{OA}, \varphi)$.

DE

V. ALACI.

1. O generalizare a *transformării patratice* şi *antipatratice*, de care m'am ocupat în lucrarea *„Trigonometria patratică“*, este *transformarea rombică* şi *antirombică*, precum şi *transformările* $(\overline{OA}, \varphi)$, pe care le vom expune în cele ce urmează şi în care joacă un rol important unghiul de transformare constant φ, $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$.

Transformarea rombică.

2. *Definiţie.* Fie un punct P de coordonate polare (ϱ, θ), O fiind polul şi Ox axa polară. Luăm pe axa $x'x$ lungimea $OA = OP = \varrho$ (OA se ia spre dreapta, sau spre stânga, astfel ca P şi A să fie de aceiaşi parte a axei $y'y$) şi prin A ducem dreapta AB (de partea axei $x'x$ unde este P), care întâlneşte în P_1 pe OP, astfel ca $\sphericalangle OAB = \varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$, (fig. 1).

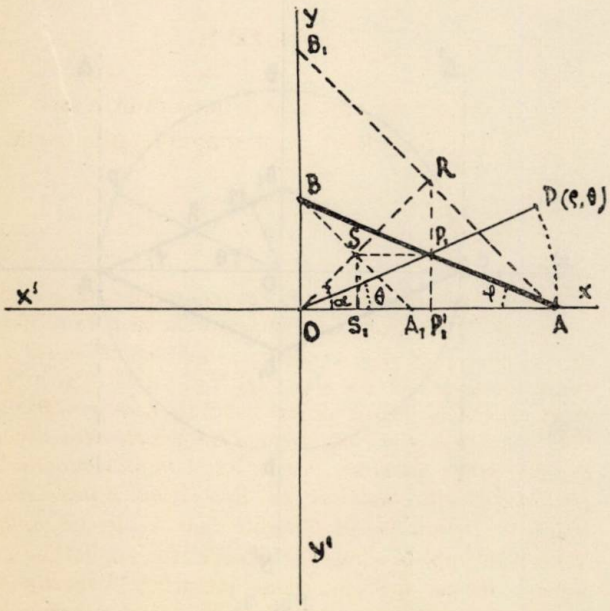


Fig. 1.

Punctul P_1 astfel obţinut, îl numim transformatul rombic al punctului P.

Formule de transformare.

3. Vom stabili formulele care exprimă coordonatele carteziene, sau polare, ale punctului transformat P_1 în funcţie de coordonatele polare ale punctului P.

1°. Intre coordonatele carteziene (x, y) ale punctului P_1 şi coordonatele polare (ϱ, θ) ale lui P, există relaţiile

$$(1) \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= \varrho \, cp \, \alpha \\ y &= k \varrho \, sp \, \alpha \end{aligned}}, \qquad (k = tg \, \varphi),$$

unde

$$(2) \qquad \boxed{tg \, \alpha = \frac{tg \, \theta}{k}},$$

unghiul α definit aci, putând fi construit şi geometriceşte, ceeace vom arăta.

Iată cum se stabilesc formulele (1) şi relaţia (2). Presupunem P în primul cadran, demonstraţia fiind de altfel valabilă şi pentru celelalte cadrane. Ducem întâi dreptele auxiliare AB_1, BA_1 astfel ca,

$$OB_1 = OA, \quad OA_1 = OB, \text{ (fig. 1).}$$

Fie apoi P'_1 piciorul perpendicularei din P_1 pe $x'x$, R intersecţia lui P'_1P_1 cu AB_1, S intersecţia lui OR cu A_1B şi $\sphericalangle AOR = \alpha$, unghiul α măsurat ca şi θ, de la Ox, în senz pozitiv.

Observăm pe figură că,

$$x = OP'_1, \quad y = P'_1P_1$$

şi P_1S este paralelă cu $x'x$, fiindcă din perechile de triunghiuri asemeni P'_1AR, OAB_1 şi OSB, ORB_1, reiasă

$$\frac{P'_1P_1}{P_1R} = \frac{OS}{SR} = \frac{OB}{BB_1};$$

prin urmare

$$P'_1P_1 = S_1S = y.$$

Acum, în triunghiurile dreptunghice OP'_1R şi OS_1S, aplicăm *teorema 1ª* din *„Trigonometria patratică“* (No. 49, P. IIª), anume: *Intr'un triunghiu dreptunghic, o catetă este egală cu suma catetelor înmulţită cu sinusul patratic al unghiului opus, sau cosinusul patratic al unghiului alăturat,* şi privind figura avem respectiv:

$$OP'_1 = (OP'_1 + P'_1R) \, cp \, \alpha = OA \, cp \, \alpha$$
$$S_1S = (OS_1 + S_1S) \, sp \, \alpha = OA_1 \, sp \, \alpha,$$

sau

$$\begin{cases} x = \varrho\, cp\, \alpha \\ y = k\, \varrho\, sp\, \alpha \end{cases}$$

fiindcă:

$$O A_1 = O B = O A \operatorname{tg} \varphi = k \varrho.$$

Formulele de transformare (1) sunt astfel stabilite. Pentru a motiva şi relaţia (2), observăm din triunghiul dreptunghic $O P_1' P_1$ şi din relaţiile (1) că,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta = k \operatorname{tg} \alpha,$$

ceeace invederează relaţia (2). Totodată reţinem construcţia geometrică a unghiului α ($\alpha = \sphericalangle A O R$).

2°. Intre coordonatele polare (ϱ, θ) ale lui P şi coordonatele polare (ϱ_1, θ) a lui P_1, există relaţiile,

$$\boxed{\varrho = \varrho_1 \frac{\sin \theta}{k\, sp\, \alpha} = \varrho_1 \frac{\cos \theta}{cp\, \alpha}} \tag{3}$$

unde α este definit de relaţia (2), sau este obţinut, prin construcţia dată, (fig. 1). In adevăr, dacă (x, y) şi (ϱ_1, θ) sunt coordonatele carteziene şi polare ale lui P_1, avem cum ştim:

$$\begin{cases} x = \varrho_1 \cos \theta \\ y = \varrho_1 \sin \theta. \end{cases}$$

Comparând aceste valori ale lui x, y cu acelea din relaţiile (1), obţinem tocmai relaţiile de transformare (3) şi încă

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta = k \operatorname{tg} \alpha,$$

adică relaţia (2). Formulele de transformare (1), (3) şi relaţia (2) sunt valabile numai pentru $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Transformata rombică a unei curbe date.

4. Dacă avem o curbă oarecare (C) şi construim pentru fiecare punct al ei A *transformatul său rombic* A_1, cum am arătat, atunci locul geometric al lui A_1 când A descrie curba (C), este o altă curbă (C_1) pe care o numim, *transformata rombică a curbei* (C).

Dacă

$$\varrho = f(\theta) \tag{4}$$

este ecuaţia polară a curbei (C), atunci evident că

$$\boxed{\varrho_1 = \frac{k\, sp\, \alpha}{\sin \theta} f(\theta)}, \text{ unde: } \boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta}{k},\ k = \operatorname{tg} \varphi}, \tag{5}$$

este *ecuaţia polară a curbei* (C_1), *transformata rombică a curbei* (C), în baza relaţiilor de transformare (3).

Observare. In cazul particular $\varphi = 45°$, rezultă $k = 1$, $\alpha = \theta$ şi ecuaţia polară (5), devine

$$\boxed{\varrho_1 = \frac{sp\, \theta}{\sin \theta} f(\theta)},$$

care este cum am arătat în *„Trigonometria patratică“*, ecuaţia polară a *transformatei patratice* a curbei (4).

Transformata patratică a unei curbe (C) *este deci un caz particular a transformatei sale rombice, când* $\varphi = 45°$.

Aplicaţii.

5. **Problemă.** *Se cere transformata rombică a cercului*

$$\varrho = a. \tag{7}$$

Soluţie geometrică. Fie cercul de rază a, cu centru în O, de ecuaţie (7), care întâlneşte axele în A, B, C, D, (fig. 2).

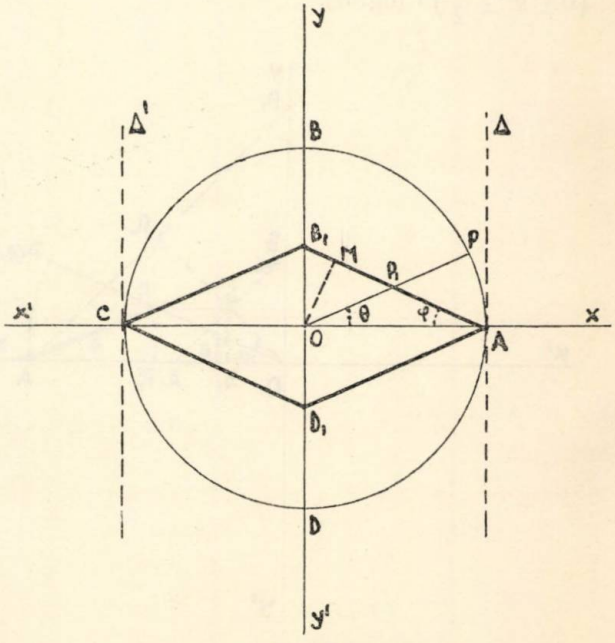


Fig. 2.

Ducem din A dreapta $A B_1$, astfel ca $\sphericalangle O A B_1 = \varphi$ $(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$ şi observăm că *transformatul rombic*

al oricărui punct P de pe arcul de cerc A B este, conform definiției expuse la No. 2, în P_1 intersecția lui O P cu $A B_1$

Transformata rombică a arcului de cerc A B *este prin urmare segmentul de dreaptă* $A B_1$.

Analog, *transformatele rombice* ale arcelor de cerc B C, C D, D A, sunt respectiv segmentele de drepte $B_1 C$, $C D_1$, $D_1 A$. Rezultă că:

Transformata rombică a cercului (7), *este rombul* $A B_1 C D_1$[1].

Observări. 1°. In fig. 2. am luat $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Dacă însă $\varphi = 0$ și $\theta \neq 0$ atunci, *transformata rombică* a cercului (7) este punctul O; iar dacă $\varphi = 0$ și $\theta = 0$ atunci, *transformata rombică* a cercului (7), este axa $x' x$.

2°. Dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ atunci, *transformata rombică* a cercului (7) se compune din dreptele paralele Δ și Δ' ce trec respectiv prin A și C (fig. 2), ceace este ușor de observat.

3°. Evident că domeniul interior și exterior al cercului O, se *transformă rombic*, punctual, respectiv în domeniul interior și exterior rombului $A B_1 C D_1$.

Soluție analitică. Conform ecuației (5), rezultă că ecuația polară a *transformatei rombice* a cercului (7), este

$$\boxed{\varrho_1 = \frac{a\, k\, sp\, \alpha}{\sin \theta}}, \tag{8}$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta}{k},\ k = \operatorname{tg} \varphi}. \tag{9}$$

Să construim configurația a cărei ecuație polară este (8).

Pentru aceasta observăm că, înlocuind θ prin $-\theta$, sau prin $\pi - \theta$, ϱ_1 rămâne neschimbat, fiindcă și α trebuie înlocuit respectiv prin $-\alpha$, sau prin $\pi - \alpha$, cum reiasă din (9), unde k este constant.

Rezultă că configurația (8) are axele de simetrie $x' x$, $y' y$. Este suficient prin urmare a construi partea configurației (8) din primul cadran și a o întregi în baza simetriei.

[1]) Pentru aceasta am numit *transformare rombică*, transformarea de care ne ocupăm.

Dacă deci, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, din relația (9) care se mai poate scri

$$\frac{sp\, \alpha}{cp\, a} = \frac{\sin \theta}{k \cos \theta},$$

și din relația fundamentală din *„Trigonometria patratică“*

$$sp\, \alpha + cp\, \alpha = 1,$$

deducem

$$sp\, \alpha = \frac{\sin \theta}{\sin \theta + k \cos \theta} = \frac{\cos \varphi \sin \theta}{\sin (\theta + \varphi)}, \tag{10}$$

valoare care înlocuită în (8) ne dă:

$$\varrho_1 = \frac{a \sin \varphi}{\cos\left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]}. \tag{11}$$

Dar în coordonate polare, ecuația (11) reprezintă o dreaptă, având depărtarea O M de origină $l = a \sin \varphi$ și înclinarea lui l față de O x fiind $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Această dreaptă este tocmai $A B_1$ (fig. 2), cum ușor se observă, din care reținem numai segmentul $A B_1$.

Configurația complectă, având ecuația polară (8), în baza simetriei ei față de axe, este rombul $A B_1 C D_1$. Astfel că: *Transformata rombică a cercului* (7), *este rombul* $A B_1 C D_1$.

Observările 1°, 2° și 3° din soluția precedentă se mențin și aci, ceeace este ușor de invederat din (8). Reținem că, ecuația polară (8), cu condițiile (9), reprezintă analitic rombul $A B_1 C D_1$, (fig. 2).

6. **Problemă**. *Se cere transformata rombică a unui patrat de semidiagonală* O A = *a*.

Soluție. Luând ca axe diagonalele patratului dat A B C D, de semidiagonală O A = *a*, atunci ecuația sa polară este

$$\varrho = a \frac{sp\, \theta}{\sin \theta}, \tag{12}$$

cum am stabilit în *„Trigonometria patratică“* [No. 178, ecuația (131), P. IV^a].

Având ecuația polară a patratului A B C D, conform formulei de transformare (5), rezultă că, ecuația polară a *transformatei sale rombice*, este:

$$\boxed{\varrho_1 = \frac{a\, k\, sp\, \alpha\, sp\, \theta}{\sin^2 \theta}}, \tag{13}$$

unde:

(14) $$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k},\ k = \operatorname{tg}\varphi}\ .$$

Să construim configurația a cărei ecuație polară este (13).

Pentru aceasta observăm că, înlocuind θ prin $-\theta$, sau prin $\pi-\theta$, ϱ_1 rămâne neschimbat, fiindcă și α se înlocuește respectiv prin $-\alpha$, sau prin $\pi-\alpha$, cum reiasă din (14), unde k este constant.

Rezultă de aci că configurația (13) are axele de simetrie $x'x$, $y'y$.

Este suficient prin urmare a construi partea configurației (13) din primul cadran și a o întregi în baza simetriei, (fig. 3).

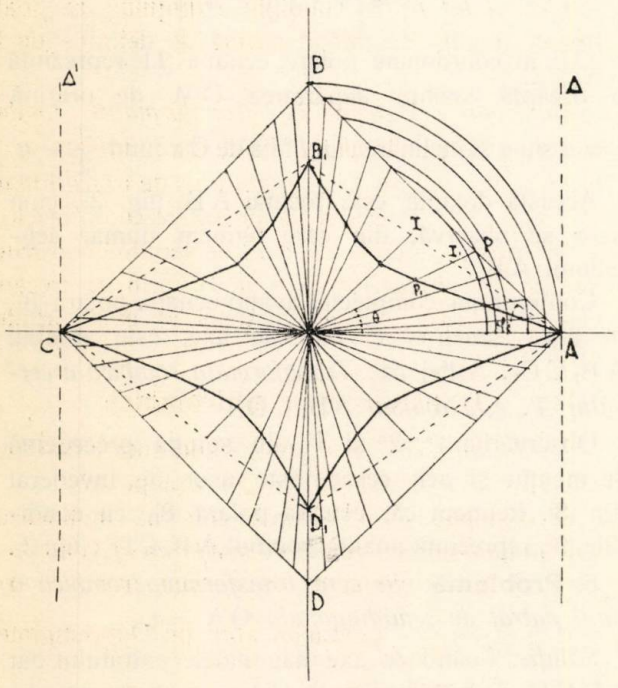


Fig. 3.

Dacă deci, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, din relația (14) identică cu (9) din problema precedentă, deducem și aci relația (10), adică

$$sp\,\alpha = \frac{\cos\varphi \sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)},$$

în virtutea căreia, ecuația (13) devine:

(15) $$\varrho_1 = \frac{a \sin\varphi\, sp\,\theta}{\sin\theta \sin(\theta+\varphi)}\ .$$

Unele considerații geometrice, permit a simplifica încă ecuația polară (15), a cărei reprezentare grafică, în primul cadran, ne-am propus s'o avem.

Pentru aceasta, ducem dreapta auxiliară AB_1, astfel ca $\sphericalangle OAB_1 = \varphi$, apoi luăm un punct oarecare P pe latura AB, de unghiu polar θ și fie I_1 intersecția razei polare OP cu AB_1. In triunghiul OAI_1, *teorema sinusurilor* ne dă imediat:

$$OI_1 = a\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}\ .$$

In virtutea acestei relații, ecuația (15) devine:

(16) $$\varrho_1 = OI_1\,\frac{sp\,\theta}{\sin\theta}\ .$$

Ori este ușor de construit acum curba reprezentată de ecuația (16), când θ variază în primul cadran, în baza tabloului de variație:

θ	0^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
ϱ_1	a	$\frac{OI}{\sqrt{2}}$	OB_1

.

Obținem astfel arcul AP_1B, care se poate construi simplu și prin puncte, în baza definiției de la No. 2, când facem ca P varieze pe latura AB, (fig. 3).

Intregind arcul AP_1B_1 cu arcele corespunzătoare din celelalte cadrane, obținem configurația complectă de ecuație polară (13). Rezultă că:

Transformata rombică a patratului ABCD *este configurația curbilinie* $AP_1B_1CD_1A$.

Observări. 1°. In fig. 3, am luat $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Dacă însă $\varphi = 0$ și $\theta \neq 0$ atunci, *transformata rombică* a patratului (12), este punctul O; iar dacă $\varphi = 0$, $\theta = 0$ atunci *transformata rombică* a patratului (12), este axa $x'x$.

2°. Dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$, arcul de curbă AP_1B și celelalte arce ale configurației (13), devin asimptote respectiv dreptelor paralele Δ și Δ' ce trec respectiv prin A și C și ar fi interesant a construi figura, conform definiției de la No. 2.

3°. Domeniul interior și exterior al patratului ABCD, se *transformă rombic*, punctual, respectiv în domeniul interior și exterior al configurației $AP_1B_1CD_1A$.

Transformata rombică iterată.

7. Dacă,

$$\varrho = f(\theta) \tag{17}$$

este ecuaţia polară a unei curbe, am arătat că, *transformata sa rombică*, are ecuaţia

$$\varrho_1 = \frac{k_1 \, sp\, \alpha_1}{\sin\theta} f(\theta), \text{ unde: } \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_1}, \; k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1, \tag{18}$$

conform ecuaţiei (5), φ_1 fiind aci unghiul de transformare.

Transformata rombică a configuraţiei (18), φ_2 fiind noul unghiu de transformare, pe care o numim *transformata rombică* (φ_1, φ_2) *a curbei* (17), are evident ecuaţia polară

$$\varrho_n = \frac{k_1 \, k_2 \, sp\, \alpha_1 \, sp\, \alpha_2}{\sin^2\theta} f(\theta), \tag{19}$$

unde:

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_i}, \; k_i = \operatorname{tg}\varphi_i, \qquad (i = 1,2),$$

tot conform ecuaţiei (5).

Mai general,

$$\boxed{\varrho_n = \frac{k_1 k_2 \ldots k_n \, sp\, \alpha_1 sp\, \alpha_2 \ldots sp\, \alpha_n}{\sin^n\theta} f(\theta)}, \tag{20}$$

unde,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_i}, \; k_i = \operatorname{tg}\varphi_i, \; (i = 1, 2, \ldots, n)}, \tag{21}$$

este evident ecuaţia polară a *transformatei rombice* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ a curbei (17).

Caz particular. Dacă,

$$\varphi_i = \varphi, \quad \alpha_i = \alpha, \quad k_i = k, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

atunci ecuaţia polară (20) devine

$$\boxed{\varrho_n = \left(\frac{k \, sp\, \alpha}{\sin\theta}\right)^n f(\theta)}, \tag{22}$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \; k = \operatorname{tg}\varphi}. \tag{23}$$

Ecuaţia polară (22), o numim *transformata rombică de ordinul al n-lea a curbei* (17).

Observare. Din ecuaţia polară (20) se vede că, ordinea în care se obţin *transformatele rombice iterate* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, este independentă. Iată o problemă bazată pe această observare:

8. **Problemă.** *Dacă avem un punct* A *şi'l transformăm rombic, întâi de unghiurile* (φ_1, φ_2) şi apoi de unghiurile (φ_2, φ_1), *obţinem în ambele cazuri acelaşi punct transformat* B.

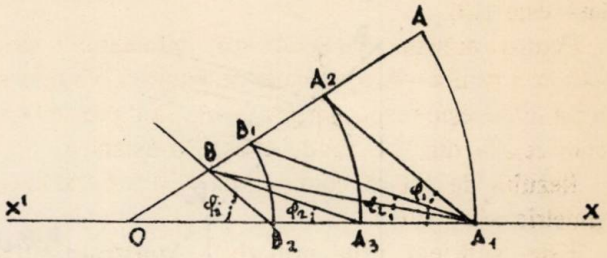


Fig. 4.

Construcţia care ne dă punctulB *transformatul rombic al lui* A, în condiţiile enunţului, se poate urmări în (fig. 4), ţinând seamă de definiţia de la No. 2.

Observare. Punctul B, *transformatul rombic* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ al lui A, fiind unic, oricare ar fi ordinea în care se aleg unghiurile de transformare $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, rezultă că prin B trece un fascicol de $n!$ drepte diferite, cu care se termină construcţiile ce ne conduc de la A la B, prin (B trecând evident şi raza O A), cum uşor se poate urmări geometric.

Transformarea antirombică.

9. *Definiţie.* Fie un punct P de coordonate polare (ϱ, θ), O fiind polul şi O x axa polară.

Ducem prin P o dreaptă care să întâlnească axa polară într'un punct A, astfel ca $\sphericalangle$ O A P $= \varphi$ (P şi A fiind totdeauna de aceiaşi parte a axei $y'y$ şi $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$). Luăm apoi pe O P lungimea $OP_1 = OA = r_1$, (fig. 5).

Punctul P_1 *astfel obţinut, îl numim transformatul antirombic al punctului* P, (pentru că invers, P este transformatul rombic al lui P_1).

Formule de transformare.

10. Intre coordonatele polare (ϱ, θ) ale punctului P şi coordonatele polare (r_1, θ) ale punctului P_1, avem relaţia:

$$\boxed{\varrho = r_1 \frac{k \, sp\, \alpha}{\sin\theta}}, \tag{24}$$

unde:

(25) $$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \quad k = \operatorname{tg}\varphi}\,,$$

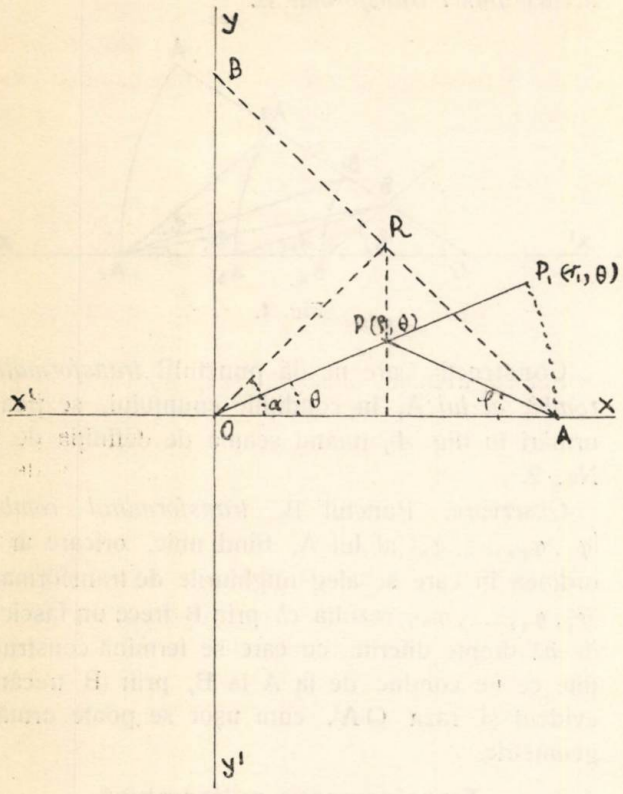


Fig. 5.

Această formulă se justică astfel. Dacă considerăm $P(\varrho, \theta)$, ca *transformatul* rombic al punctului $P_1(r_1, \theta)$, ceeace este evident conform definiției de la No. 2, atunci între coordonatele lor, am arătat că există relația (3), adică în cazul nostru

$$r_1 = \varrho \frac{\sin\theta}{k\, sp\, \alpha}, \quad \text{unde: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \; k = \operatorname{tg}\varphi.$$

De aci se deduce imediat relația (24). Unghiul α care intervine în (24), este același în figurile 1. și 5., anume $\alpha = \sphericalangle A\,O\,R$, R fiind, în fig. 5., intersecția perpendicularei dusă prin P pe Ox, cu dreapta auxiliară A B ($O\,A = O\,B$).

Transformata antirombică a unei curbe date.

11. Dacă

(25) $$\varrho = f(\theta),$$

este ecuația polară a unei curbe, atunci

(26) $$\boxed{r_1 = \frac{\sin\theta}{k\, sp\, \alpha} f(\theta)}\,,$$

unde:

(27) $$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \quad k = \operatorname{tg}\varphi}\,,$$

este ecuația polară a *transformatei sale antirombice*, conform formulei de transformare (24).

Observare. Mai putem observa că, *transformata antirombică* a unei configurații date, este configurația a cărei *transformată rombică* este cea dată. In virtutea acestei observări putem afirma că: *Transformata antirombică* a rombului $A\,B_1\,C\,D_1$, este cercul O, (fig. 2).

Transformata antirombică a configurației curbilinii $A\,P_1\,B_1\,C\,D_1\,A$ din fig. 3., este patratul A B C D.

Transformata antirombică iterată.

12. Dacă,

28) $$\varrho = f(\theta)$$

este ecuația polară a unei curbe, atunci

(29) $$\boxed{r_n = \frac{\sin^n\theta}{k_1\, k_2 \ldots k_n\, sp\,\alpha_1\, sp\,\alpha_2 \ldots sp\,\alpha_n} f(\theta)}\,,$$

unde

(30) $$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_i}, \; k_i = \operatorname{tg}\varphi_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)}\,,$$

este ecuația polară, a *transformatei sale antirombice* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

Aceasta se justifică prin faptul că *transformata rombică* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ a configurației (29), este curba inițială (28).

Caz particular. Dacă,

$$\varphi_i = \varphi, \quad \alpha_i = \alpha, \quad k_i = k, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

atunci ecuația polară (29) devine

(31) $$\boxed{r_n = \left(\frac{\sin\theta}{k\, sp\, \alpha}\right)^n}\,,$$

unde:

(32) $$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \; k = \operatorname{tg}\varphi}\,.$$

Ecuația polară (31), o numim *transformata antirombică de ordinul al n-lea* a curbei (28).

Proprietăți.

13. Ecuațiile polare (22) și (31) pe care le-am stabilit, pot fi cuprinse în următoarea ecuație

$$\boxed{r = \left(\frac{k\, sp\, \alpha}{\sin\theta}\right)^n f(\theta)}, \tag{33}$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k},\ k = \operatorname{tg}\alpha}. \tag{34}$$

Când întregul n este pozitiv, ecuația polară (33) reprezintă *transformata rombică de ordinul al n-lea a curbei* $\varrho = f(\theta)$; iar când întregul n este negativ, ecuația polară (33) reprezintă *transformata antirombică de ordinul al n-lea a aceleiași curbe*, $\varrho = f(\theta)$.

14. Dacă înmulțim relațiile (22) și (31), obținem

$$\boxed{\varrho_n r_n = \varrho^2}, \tag{35}$$

ceeace ne permite a enunța proprietatea:

Orice rază polară intersectează o curbă și transformatele ei rombică și antirombică de ordinul al n-lea, în trei puncte astfel că, raza mijlocie este medie proporțională între celelalte două raze.

Caz particular. Pentru $\varrho = a$, relația (35) devine

$$\boxed{\varrho_n r_n = a^2}, \tag{36}$$

ceeace exprimă proprietatea:

Transformata rombică și antirombică, de ordinul al n-lea a cercului $\varrho = a$, *sunt curbe inverse în raport cu origina.*

15. *Dacă considerăm curbele inverse în raport cu origina,*

$$\varrho_n = a f(\theta), \qquad r = \frac{a}{f(\theta)}, \qquad (a, \text{ constant}),$$

atunci transformata rombică de ordinul al n-lea a primei și transformata antirombică de ordinul al n-lea a celei de a 2ª, ale căror ecuații polare sunt respectiv,

$$\varrho_n = a\left(\frac{k\, sp\, \alpha}{\sin\theta}\right)^n f(\theta), \quad r_n = \left(\frac{\sin\theta}{k\sin\alpha}\right)^n \frac{a}{f(\theta)},$$

unde:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \quad k = \operatorname{tg}\varphi,$$

sunt și ele curbe inverse în raport cu origina, fiindcă ne dau

$$\boxed{\varrho_n r_n = a^2}.$$

Aplicații.

16. **Problemă.** *Se cere transformata antirombică a cercului,*

$$\varrho = a. \tag{37}$$

Prima soluție. Conform formulei (26'), *transformata antirombică* a cercului (37'), are ecuația polară

$$\boxed{r_1 = a\frac{\sin\theta}{k\, sp\, \alpha}}, \tag{38}$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k},\ k = \operatorname{tg}\varphi}. \tag{39}$$

Să construim configurația a cărei ecuație polară este (38).

Pentru aceasta observăm că, înlocuind θ prin $-\theta$, sau prin $\pi - \theta$, r_1 rămâne neschimbat, fiindcă și α trebuie înlocuit prin $-\alpha$, sau prin $\pi - \alpha$, cum reiasă din (39), unde k este constant.

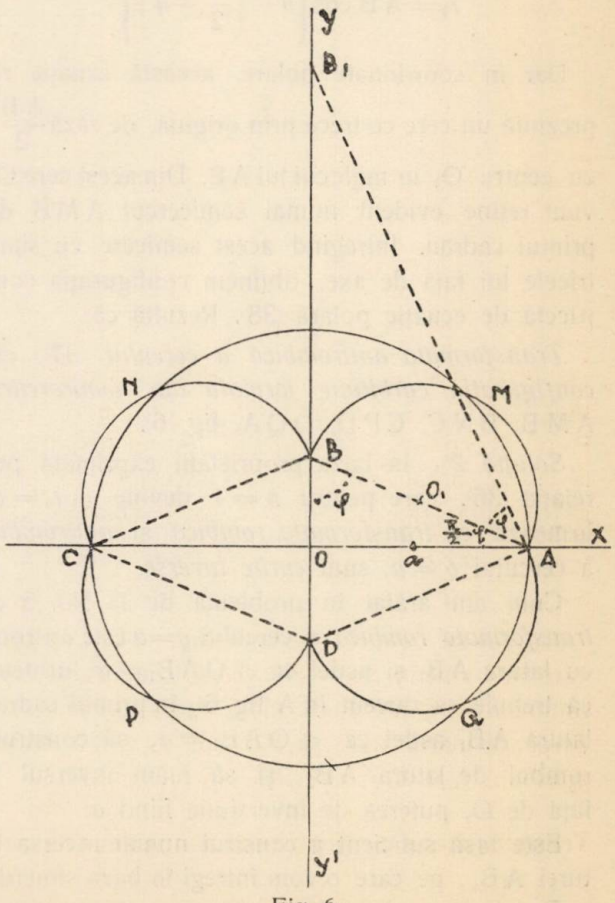


Fig. 6.

Rezultă că configurația (38) are axele de simetrie $x'x$, $y'y$, (fig. 6).

Este suficient prin urmare, a construi partea configurației (38) din primul cadran și a o întregi în baza simetriei.

Pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, din relația (39), deducem

$$sp\ \alpha = \frac{\cos\varphi \sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)},$$

analog cum am stabilit relația (10). In virtutea acestei relații, ecuația (38) devine:

$$r_1 = \frac{a}{\sin\varphi}\sin(\theta+\varphi). \tag{40}$$

Ducând din A dreapta AB astfel ca $\sphericalangle OAB = \frac{\pi}{2} - \varphi$, ($\varphi$ unghiul de transformare dat), vedem că

$$a = AB\sin\varphi,$$

deci ecuația (40) devine:

$$r_1 = AB\cos\left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right].$$

Dar în coordonate polare, această ecuație reprezintă un cerc ce trece prin origină, de rază $\frac{AB}{2}$, cu centru O_1 în mijlocul lui AB. Din acest cerc O_1, vom reține evident numai semicercul AMB din primul cadran. Intregind acest semicerc cu simetricele lui față de axe, obținem configurația complectă de ecuație polară (38). Rezultă că:

Transformata antirombică a cercului (37), *este configurația curbilinie formată din semicercurile* AMB, BNC, CPD, DQA, (fig. 6).

Soluția 2ª. In baza proprietății exprimată prin relația (36), care pentru $n = 1$ devine $\varrho_1 r_1 = a^2$, urmează că *transformata rombică* și *antirombică* a cercului $\varrho = a$, sunt *curbe inverse.*

Cum am arătat în problema de la No. 5 că, *transformata rombică* a cercului $\varrho = a$ este un romb cu latura AB_1 și astfel ca $\sphericalangle OAB_1 = \varphi$, urmează că trebuie să ducem în A (fig. 6), în primul cadran, latura AB_1 astfel ca $\sphericalangle OAB_1 = \varphi$, să construim rombul de latura AB_1, și să luăm inversul lui față de O, puterea de inversiune fiind a.

Este însă suficient a construi numai inversa laturei AB_1, pe care o vom întregi în baza simetriei.

Dar inversa dreptei pe care se găsește latura AB_1, față de O, cu puterea de inversiune a, știm că este un cerc ce trece prin origină. Inversul lui A fiind el însuși, iar inversul lui B_1 fiind B, fiindcă

$$\overline{OB_1} \cdot \overline{OB} = a\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot a\,\mathrm{cotg}\,\varphi = a^2,$$

urmează că cercul care trece prin O, trece și prin punctele A, B. Din acest cerc reținem numai semicercul AMB, inversul laturei AB_1. Analog găsim că semicercurile BNC, CPD, DQA fac parte din configurația cerută și împreună ne dau *transformata antirombică a cercului* $\varrho = a$. Am găsit astfel aceiași configurație curbilinie, ca în prima soluție.

Transformările $(\overline{OA}, \varphi)$.

17. Vom expune acum unele transformări mai generale, pe care le-am numit *transformările* $(\overline{OA}, \varphi)$, unde $\overline{OA}$ este o lungime bine definită în functie de coordonatele polare (ϱ, θ) ale unui punct, iar φ este un unghiu constant dat, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

18. *Definiție.* Fie P un punct de coordonate polare (ϱ, θ), O fiind polul și Ox axa polară. Luăm pe axa $x'x$ o lungime $\overline{OA}$, de partea unde este P față de $y'y$, definită de o relație de forma

$$\overline{OA} = F(\varrho, \theta). \tag{41}$$

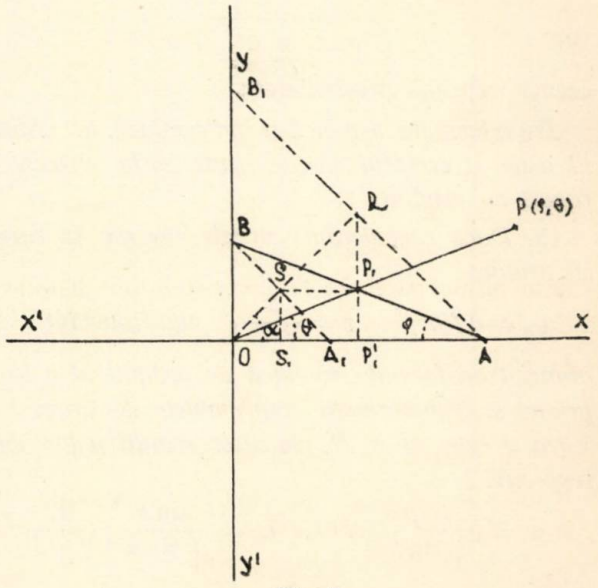


Fig. 7.

Din A ducem dreapta AB, de partea unde se află raza polară OP, astfel ca

$$\sphericalangle OAB = \varphi, \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

și fie P_1 intersecția lui AB cu OP (fig. 7).

Punctul P_1, *astfel obținut, îl numim transformatul* $(\overline{OA}, \varphi)$ *al punctului* P.

Cazuri particulare. 1°. Dacă,

$$OA = \varrho, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

punctul P_1 este *transformatul rombic* al lui P.

2°. Dacă,

$$\overline{OA} = \varrho, \qquad \varphi = 45^\circ,$$

punctul P_1 este *transformatul patratic* al lui P.

Formule de transformare.

19. Vom stabili formulele care ne dau coordonatele carteziene (x, y), sau cele polare (ϱ_1, θ) ale punctului *transformat* $(\overline{OA}, \varphi)$ P_1, în funcție de coordonatele polare (ϱ, θ) ale punctului P.

1°. Intre coordonatele carteziene (x, y) ale punctului P_1 și coordonatele polare (ϱ, θ) ale punctului P, avem relațiile

$$\boxed{\begin{aligned} x &= F(\varrho, \theta)\, cp\, \alpha \\ y &= k\, F(\varrho, \theta)\, sp\, \alpha \end{aligned}}, \qquad (k = \operatorname{tg} \alpha), \tag{42}$$

unde

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta}{k}}, \tag{43}$$

unghiul α definit aci, putându-se obține și grafic, cum vom arăta.

Formulele (42) și (43) se stabilesc în felul următor.

După ce am obținut P_1, *transformatul* $(\overline{OA}, \varphi)$ al unui punct oarecare $P(\varrho, \theta)$, conform definiției de la No. 18, ducem dreptele auxiliare AB_1 și BA_1 astfel ca,

$$OB_1 = OA, \qquad OA_1 = OB.$$

Fie P_1' piciorul perpendicularei din P_1 pe $x'x$, R intersecția lui $P_1'P_1$ cu AB_1, S intersecția lui OR cu A_1B și $\sphericalangle AOR = \alpha$, unghiul α măsurat ca și θ de la Ox în senz pozitiv.

Observăm pe figură că,

$$x = OP_1', \qquad y = P_1'P_1$$

și P_1S este paralelă cu $x'x$, fiindcă din perechile de triunghiuri asemeni $P_1'AR$, OAB_1 și OSB, ORB_1, reiasă

$$\frac{P_1'P_1}{P_1R} = \frac{OS}{SR} = \frac{OB}{BB_1};$$

prin urmare,

$$P_1'P_1 = S_1S = y.$$

Acum, în triunghiurile dreptunghice $OP_1'R$, OS_1S, *teorema 1ª* din *Trigonometria patratică* (No. 49, P. II^a), ne dă:

$$OP_1' = (OP_1' + P_1'R)\, cp\, \alpha = \overline{OA}\, cp\, \alpha$$

$$S_1S = (OS_1 + S_1S)\, sp\, \alpha = \overline{OA_1}\, sp\, \alpha,$$

sau în baza relației (41),

$$\left\{\begin{aligned} x &= F(\varrho, \theta)\, cp\, \alpha \\ y &= k\, F(\varrho, \theta)\, sp\, \alpha \end{aligned}\right. \qquad (k = \operatorname{tg} \varphi),$$

fiindcă

$$\overline{OA_1} = \overline{OB} = \overline{OA} \operatorname{tg} \varphi = k\, F(\varrho, \theta).$$

Formulele de transformare (42) sunt astfel stabilite, iar relația (43) reiasă din aceste formule și din triunghiul $OP_1'P_1$, din care avem:

$$\frac{y}{x} = k \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta.$$

Aceste formule sunt valabile pentru orice cadran.

2°. Intre coordonatele polare (ϱ, θ) ale punctului P și coordonatele polare (ϱ_1, θ) ale lui P_1, există relațiile:

$$\boxed{F(\varrho, \theta) = \varrho_1 \frac{\sin \theta}{k\, sp\, \alpha} = \varrho_1 \frac{\cos \theta}{cp\, \alpha}}, \tag{44}$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta}{k}, \quad k = \operatorname{tg} \varphi}. \tag{45}$$

In adevăr, dacă (x, y) și (ϱ_1, θ) sunt coordonatele carteziene și polare ale punctului P_1, avem cum știm,

$$\left\{\begin{aligned} x &= \varrho_1 \cos \theta \\ y &= \varrho_1 \sin \theta, \end{aligned}\right.$$

care comparate cu valorile x, y din relațiile (42), ne conduc la formulele de transformare (44).

Dar din (44), deducem încă

$$k \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta,$$

adică relațiile (45), α putându-se avea și grafic, cum se vede în fig. 7.

Transformata $(\overline{OA}, \varphi)$ a unei curbe date.

20. Dacă avem o curbă oarecare (C) şi pentru fiecare punct al ei P, construim punctul P_1, *transformatul* $(\overline{OA}, \varphi)$ al lui P, cum am arătat, atunci locul geometric al lui P_1, când P descrie curba (C), este o altă curbă (C_1), pe care o numim *transformata* $(\overline{OA}, \varphi)$ *a curbei* (C).

Dacă,

(46) $$\varrho = f(\theta)$$

este ecuaţia polară a curbei (C), atunci evident că,

(47) $$\boxed{\varrho_1 = \frac{k\, sp\, \alpha}{\sin\theta} F[f(\theta), \theta]},$$

unde:

(48) $$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \quad k = \operatorname{tg}\varphi}.$$

este ecuaţia polară a curbei (C_1), *transformata* $(\overline{OA}, \varphi)$, a curbei (C), în baza relaţiilor de transformare (44).

Aplicaţii.

21. **Problemă.** *Se cere transformata* $(\overline{OA}, \varphi)$ *a dreptei,*

(49) $$\varrho = \frac{a}{\cos\theta},$$

în care lungimea $\overline{OA}$ *este definită de relaţia*

$$\overline{OA} = \varrho\cos\theta, \quad \textit{iar } \varphi \textit{ constant}, \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluţie. Fiindcă, în cazul nostru

$$\overline{OA} = F(\varrho, \theta) = \varrho\cos\theta, \quad \text{iar} \quad \varrho = \frac{a}{\cos\theta},$$

rezultă,

$$F[f(\theta), \theta] = a.$$

astfel că formula de transformare (47), ne dă

(50) $\varrho_1 = \dfrac{a\, k\, sp\, \alpha}{\sin\theta}$, unde: (51) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{k}$, $k = \operatorname{tg}\varphi$.

Aceasta este ecuaţia polară a *transformatei* $(\overline{OA}, \varphi)$ a dreptei date, (49).

Rămâne să construim configuraţia de ecuaţie polară (50), având în vedere enunţul problemei.

Am arătat însă în soluţia analitică a problemei de la No. 5, că ecuaţia polară (50) reprezintă rombul AB_1CD_1 din fig. 2., în care semidiagonala $OA = a$, iar $\sphericalangle OAB_1 = \varphi$.

Cum în cazul nostru punctele dreptei date, de ecuaţie (49), se obţin numai pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ şi $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$, urmează să construim numai partea rombului, având semidiagonala $OA = a$ şi $\sphericalangle OAB = \varphi$,

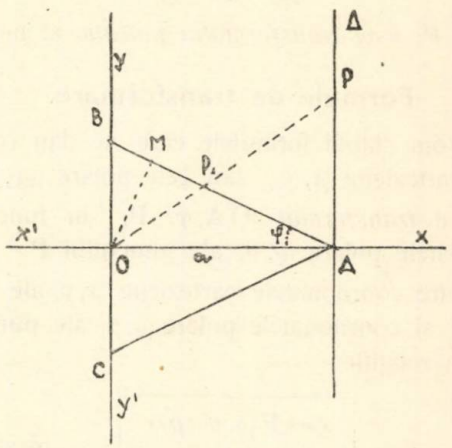


Fig. 8.

din primul şi al 4-lea cadran, ceeace ne dă configuraţia unghiulară BAC, (fig. 8). Rezultă că:

Transformata $(\overline{OA}, \varphi)$ *a dreptei* Δ, *de ecuaţie* (49), *este configuraţia unghiulară* BAC.

Se observă că, configuraţia unghiulară BAC, se poate construi simplu şi prin puncte, luând P_1 *transformata* $(\overline{OA}, \varphi)$ a oricărui punct P al dreptei Δ, conform definiţiei de la No. 18.

22. **Problemă.** *Se cere transformata* $(\overline{OA}, \varphi)$ *a cercului*

(52) $$\varrho = 2a\cos\theta,$$

în care lungimea $\overline{OA}$ *este definită de relaţia,*

(53) $$\overline{OA} = \frac{2\varrho}{\cos\theta}, \quad \textit{iar } \varphi \textit{ constant}, \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluţie. Fiindcă în acest caz

$$\overline{OA} = F(\varrho, \theta) = \frac{2\varrho}{\cos\theta}, \quad \text{iar} \quad \varrho = 2a\cos\theta,$$

rezultă,

$$F[f(\theta), \theta] = 4a,$$

astfel că formula de transformare (47), devine

54) $\varrho_1 = \dfrac{4\,a\,k\,sp\,\alpha}{\sin\theta}$, unde: (55) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{k}$, $k = \operatorname{tg}\varphi$.

Avem astfel ecuația *polară a transformatei* $(\overline{OA}, \varphi)$ a cercului dat (52). Rămâne să construim configurația polară (54), ținând seamă de enunțul problemei.

Pentru aceasta, construim întâi cercul (52) (fig. 9) ale cărui puncte se obțin numai pentru

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi.$$

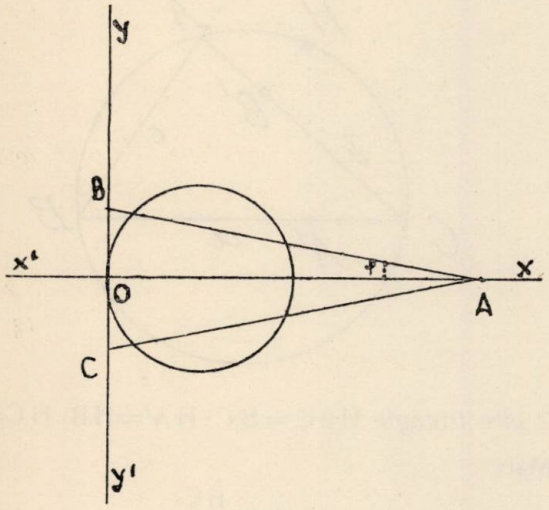


Fig. 9.

Observăm apoi că, ecuația polară (54), cum am arătat detailat în soluția analitică a problemei de la No. 5, reprezintă un romb A B C D de semidiagonală $OA = 4a$ și $\sphericalangle OAB = \varphi$.

Din acest romb vom reține evident, numai configurația unghiulară B A C, din cauza restricțiilor de interval pentru θ. In definitiv, rezultă că:

Transformata $(\overline{OA}, \varphi)$ *a cercului* (52) *este configurația unghiulară* B A C *(fig. 9).*

23. Alte probleme analoage de *transformări* $(\overline{OA}, \varphi)$ am putea formula.

Mai general, am putea presupune chiar și unghiul φ, $\left(0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$, variabil, depinzând de (ϱ, θ) ca și lungimea $\overline{OA}$, dar poate că voiu reveni.

NOTE MATEMATICE

13. — *Résoudre en nombres entiers*

$$x^6+2x^5y+3x^4y^2+4x^3y^3+3x^2y^4+2xy^5+y^6=t^4.$$

On a l'identité

$$x^6+2x^5y+3x^4y^2+4x^3y^2+3x^2y^4+2xy^5+y^6 = (x^3+x^2y+xy^2+y^3)^2.$$

Il faut encore résoudre l'équati n

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=t^2.$$

On a les formules

$$\begin{cases} t=\alpha^3+2p\alpha^2(q-1)+4p^2\alpha(q^2-2q-1)+ \\ \qquad 8p^3(q^3+q^2+q+1), \\ x=\alpha^2+8p^2q+4p^2, \\ y=4\alpha pq-8p^2q \\ \alpha=-2pq-pq^2, \end{cases}$$

p et q sont des paramètres arbitraires.

Exemples numériques.

1. $p=2, \quad q=1,$

$\alpha=-6, \quad x=84, \quad y=-80, \quad t=232.$

2. $p=1, \quad q=2,$

$\alpha=-8, \quad x=84, \quad y=-80, \quad t=232.$

On trouve les mêmes valeurs que sub (1).

On peut prendre

$$x:2^2=21, \quad y:2^2=-20, \quad t:2^3=29,$$

en effet,

$$21^6+20^6+3.21^4.20^2+3.21^2.20^4 -2.21^5.20-2.21.20^5-4.21^3.20^3=29^4 (=707281).$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

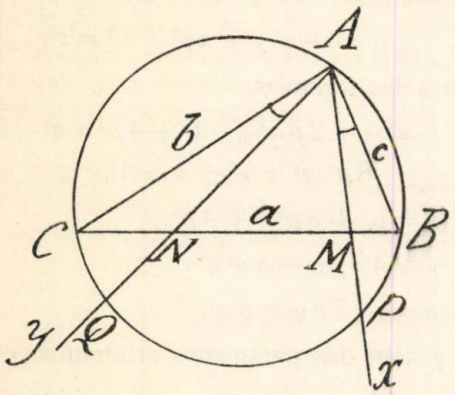
---

14. — *Généralisations du théorème de Brahamegupta.*

1. Soient B C = a, C A = b, A B = C les côtés d'un triangle fondamental inscrit au cercle de de rayon R. Si, par exemple, h_a est l'hauteur relative au côté B C = a, on a la formule

(1) $$bc = 2R\,h_a$$

relative au théorème qu'on attribue à *Brahamegupta* (*M. Chasles, Aperçu historique*, p. 420; *C. Alasia: La recente geom. del triangolo*, p. 127, 1900). On sait que de ce théorème on donne une généralisation en employant les *droites conjuguées isogonaly* relatives aux angles du triangle fondamental (c'est-à-dire les droites conduites par les sommets des angles du triangle et symétriques par rapport aux bissectrices de ces angles).



En effet, si A x, A y sont deux droites conjuguées isogonales par rapport à l'angle B A C qui coupent respectivement en M, N le côté B C et en P, Q le cercle circonscrit au triangle A B C, ont lieu les théorèmes suivants (qu'on attribue à *Pappo* et à *Giulio Carlo de Toschi, compte de Fagnano*, Sinigallia, Italia, 1682—1766)

$$(2)\qquad \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{BM.BN}{CM.CN};\quad \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}^2}=\frac{BM.CM}{BN.CN};$$

$$AB.AC=AM.AQ=AN.AP$$

(voir, p. ex., *E. Rouché, Traité* de Géom. p. 504, 1935; *Alasia, loc. cit.* p. 127).

Corollaire (*Théorème de Brahamegupta*).

Si, en particulier, A y passe par le centre du cercle circonscrit au triangle A B C, la conjugée isogonale A x il résulte perpendiculaire au côté B C et on a

$$AQ=2R,\quad AM=h_a$$

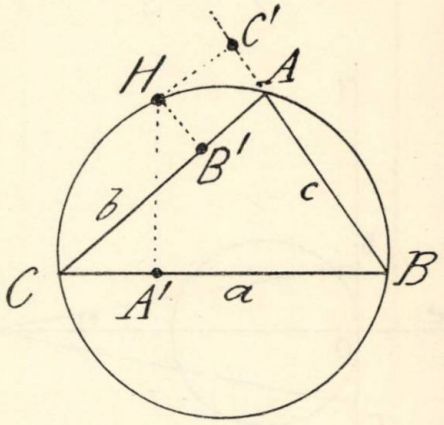
et, en vertu de la dernière relation (2),

$$bc=2Rh_a.$$

Remarque. Les relations (2) on peuvent avoir des autres importantes proprietés particulaires.

2. Nous voulons donner maintenant *une généralisation du théorème de Brahamegupta indepandamment des droites conjuguées isogonales.*

Soit H un point quelconque du cercle circonscrit au triangle A B C et A′, B′, C′ les pieds des perpendiculaires conduites du point H sur les droites des côtés $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ (on sait que les points A′, B′, C′ sont sur une droite nommée *droite de Simson, ou de Wallace*). Or on a, par exemple,



2 aire triangle $HBC=BC.HA'=HB.HC\sin A.$

Mais

$$\sin A=\frac{BC}{2R},$$

donc, en remplaçant,

$$BC.HA'=\frac{HB.HC.BC}{2R}$$

et

$$(\alpha)\qquad HB.HC=2R.HA'$$

Corollaires. I. (*Théorème de Brahamegupta*).

Si, en particulier, le point H tombe en A, on a $HA'=h_a$ et la (α) donne

$$AB.AC=bc=2Rh_a$$

II. De la relation (α) on a

$$HA.HA'=\frac{HA.HB.HC}{2R}$$

et par suite l'important et curieuse proprieté.

$$HA.HA'=HB.HB'=HC.HC'$$

M Vincenzo G. Cavallaro
Cefalù (Sicile)

15. — *Magisches Quadrat 1940.*

Im untensthendem 5^2 felderigem Quadrat sind die Zahlen 376 bis 400 so eingefügt, dass sich

(1) in jeder waagrechten Reihe,

(2) in jeder senkrechten Reihe

immer als Summe die Jahreszahl 1940 ergibt.

396	378	379	387	400
390	392	381	394	383
385	399	388	377	391
393	382	395	384	386
376	389	397	398	380

Es gibt ferner für beliebiges x

(1) $(396+x)^2+(378+x)^2+(379+x)^2+(387+x)^2+(400+x)^2$
(I. waagrechte Reihe)

$=(376+x)^2+(389+x)^2+(397+x)^2+(398+x)^2+(380+x)^2$
(V. waagrechte Reihe);

(2) $(396+x)^2+(390+x)^2+(385+x)^2+(393+x)^2+(376+x)^2$
(I. senkrechte Reihe)

$=(400+x)^2+(383+x)^2+(391+x)^2+(386+x)^2+(380+x)^2$
(V. senkrechte Reihe)

(3) $(378+x)^2+(392+x)^2+(399+x)^2+(382+x)^2+(389+x)^2$
(II. senkrechte Reihe)

$=(387+x)^2+(394+x)^2+(377+x)^2+(384+x)^2+(398+x)^2$
(IV. senkrechte Reihe);

(4) $(390+x)^2+(392+x)^2+(381+x)^2+(394+x)^2+(383+x)^2$
II. waagrechte Reihe)

$=(393+x)^2+(382+x)^2+(395+x)^2+(384+x)^2+(386+x)^2$
(IV. waagrechte Reihe);

(5) $(379+x)^2+(381+x)^2+(388+x)^2+(395+x)^2+(397+x)^2$
(III. senkrechte Reihe);

$=(385+x)^2+(399+x)^2+(388+x)^2+(377+x)^2+(391+x)^2$
(III. waagrechte Reihe).

ALFRED MOESSNER
(Nürnberg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XLV, Nr. 4, Decemvrie 1939. *Gheorghe Țițeica* (I. Viața. Omul), de *Gh. Th. Gheorghiu.* Metoda în matematici, de Inginer *Cristea Niculescu.* Apolaritatea a două forme binare și a unei forme binare cu o formă cubică, de *N. Abramescu.* Asupra studiului variației unei funcțiuni, de *Gh. Th. Gheorghiu.* Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Boletin Matematico,* anul XII, N-rile 15-16-18, *Buenos-Aires.* Calm relativ și lucrări pozitive, de *B. I. Baidaff.* Legea dualității a punctelor conjugate, de *L. Gutiérrez Novoa.* Determinarea flexiunei totale a unei curbe, de *J. Varela Gil.* Asupra sistemului diofantian $x+y+z=u+v+w$, $xyz=uvw$, de *A. Gloden.*

3. *Pitagora,* anul V, No. 3, Decemvrie 1939. Incadrarea geometriei proiective plane în geometria de contact a ciclelor, de *D. Barbilian.* O problemă de înscriere, de *O. N. Țino.* Asupra unor curbe, de *G. G. Constantinescu.* Asupra polinomului lui *Abel,* de *M. Botez.* Note matematice Probleme rezolvate și propuse.

4. *Gino Loria. Charles Sturm* et son oeuvre mathématique.

5. *Gino Loria.* Un problema aritmetico che può essere stato rizolto dagli antichi Greci.

6. *Gino Loria.* Triangles équilatéraux dérivés d'un triangle quelconque.

7. *A. Gloden.* Sur une méthode de résolution d'équations diophantiennes homogènes du troisième degré.

8. *O. N. Țino.* O problemă de înscriere.

9. *St. I. Mateescu.* Les sédiments de couleur rouge et la formation répetée des sols latéritiques dans les régions carpathiques de Roumanie.

10. *V. Thébault.* Sur l'hexagone à côtés consécutifs rectangulaires.

11. *Dr. Ing. Remus Răduleț.* Zur Theorie der Vektorfelder.

12. *Dr. Ing. Remus Răduleț.* Rechteckige Wanderwellen auf übertragungsleitungen.

13. *Radu Badesco.* Sur l'extraction de l'or par la méthode de la cyanuration.

14. *Radu Badescu.* Sopra una certa serie di *Laurent* di due variabili.

15. *Radu Badescu.* Semplificazioni ed estensioni del metodo di *Picone* per l'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico.

16. *Radu Badesco.* Sur la méthode de la cyanuration dans l'exploitations de l'or.

17. *Radu Bădescu.* Asupra unei probleme a lui *Goursat.*

18. *Michail St. Botez.* Sur la zone de convergence des quelques séries syntagmatiques.

19. *Dr. Erich Stern.* Kursformeln für Anleihen mit gleichmässig gestaffelten Zins.

20. *Letterio Toscano.* Numeri di Stirling generalizzati, operatori diferenziali e polinomi ipergeometrici.

21. *G. G Constantinescu.* Criteriile de convergenţă ale seriilor cu termeni constanţi.

22. *Dumitru Ion Mangeron.* Memoriu de titluri şi lucrări.

PROBLEME REZOLVATE

531. — *Să se studieze variaţia funcţiei*

$$y = \sin x - \operatorname{arctg} x$$

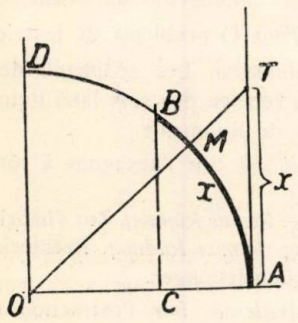
pentru x cuprins între 0^0 *şi* 90^0.

G-L Gh. Buicliu

Pe cercul de centru O considerăm arcul

$$AB = x < \frac{\pi}{2}$$

şi fie BC simsul acestui arc Pe tangenta în A la O luăm lungimea $AT = \text{arcul } x$. Dreapta OT taie arcul AB în M. Conform enunţului se cere variaţia diferenţei între lungimea BC şi lungimea arcului AM, când $0^0 < x < \frac{\pi}{2}$.



$X = \text{arc } AB$

Procedăm în felul următor.

Dăm lui x câte-va valori caracteristice în intervalul considerat, calculăm pe *sin x* şi pe *arctg x*, ,e facem diferenţa şi din comparaţia acestor diferenţe, se deduce felul cum variază y.

Valorile caracteristice ale lui x sunt acelea pentru care sunt date valorile numerice ale sinusurilor în diferite formulare, cărţi sau table de logaritmi.

Următorul tabel cuprinde acele valori

x	$\sin x$
0^0	0
$15^0 = \frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0{,}25882$
$18^0 = \frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = 0{,}30901$
$30^0 = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2} = 0{,}50000$
$36^{0\prime} = \frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = 0{,}58778$
$45^0 = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70711$
$60^0 = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86602$
$90^0 = \frac{\pi}{2}$	$1 = 1{,}00000$

Să calculăm acum valorile corespunzătoare ale lui

(1) $$u = \operatorname{arctg} x.$$

Din (1) se scoate

(2) $$\operatorname{tg} u = x.$$

In (2) dăm lui x pe rând valorile din coloana I a tabloului precedent, calculăm pe $\operatorname{tg} u$ şi apoi deducem pe u.

Fie deci

$$x = 15^0 = \frac{\pi}{12}.$$

In tabla III a tablelor de logaritmi de *J. Dupuis* se găsesc lungimile arcurilor cercului de rază 1. De acolo scoatem

lungimea arcului de $10^0 = 0{,}17453$
„ „ „ $5^0 = 0{,}08726$

Deci, lungimea arcului de $15^0 = 0{,}26179$.

Cu aceasta, (2) devine

$$\operatorname{tg} u = 0{,}26179,$$

*** $$\log \operatorname{tg} = \bar{1}{,}41797,$$

*** $$u = 14^0\,40'\,15''$$

Acum procedăm în sens învers, folosind tot tabla III a tablelor de logaritmi *J. Dupuis*. Din acea tablă avem

lungimea arcului de . . . $10^0 = 0{,}17453$
" " " . . . $4^0 = 0{,}06981$
" " " . . . $40' = 0{,}01163$
" " " . . . $10'' = 0{,}00004$
" " " . . . $5'' = 0{,}00002$

lungimea arcului de $14^0\ 40'\ 15'' = 0{,}25603$.

Deci

$$u = \text{arctg}\, x = 0{,}25603.$$

Procedăm pe aceiaşi cale pentru toate arcurile din tabloul precedent şi găsim rezultatele pe care le centralizăm în tabloul ce urmează

x	$\text{tg}\, u = x$	$u = \text{arctg}\, x$
0	0, . . .	0, . . .
$15^0 = \frac{\pi}{12}$	0,26179	$14^0\ 40'\ 15'' = 0{,}25603$
$18^0 = \frac{\pi}{12}$	0,31416	$17^0\ 26'\ 26' = 0{,}30436$
$30^0 = \frac{\pi}{6}$	0,52358	$27^0\ 38'\ 7'' = 0{,}48230$
$36^0 = \frac{\pi}{5}$	0,62832	$32^0\ 8'\ 30'' = 0{,}56095$
$45^0 = \frac{\pi}{4}$	0,78539	$38^0\ 8'\ 43' = 0{,}66573$
$60^0 = \frac{\pi}{3}$	1,04719	$46^0\ 19'\ 14'' = 0{,}80840$
$90^0 = \frac{\pi}{2}$	1,57079	$57^0\ 31'\ 6'' = 1{,}00390$

Din tablourile precedente se deduce următoarea variaţie a lui y, făcând diferenţa ultimelor coloane.

x	0^0	15^0	18^0	30^0
y	0	0,00279	0,00465	0,01770

x	36^0	45^0	60^0	90^0
y	0,02683	0,04138	0,05762	—0,00390

Acest tablou arată că y se anulează pentru $60^0 < x < 90^0$.

Calculăm din aproare în aproare şi găsim încă

x	70^0	80^0	85^0	89^0	$89^0\ 30'$
y	0,05505	0,03555	0,01852	0,00108	—0,00137

Comparând ultimele 2 tablouri se vede că, atunci când x creşte de la 0^0 la 90^0 funcţiunea y creşte până la un maxim, care are loc pentru

$$60^0 < x < 70^0,$$

apoi scade şi se anulează pentru

$$89^0\ 30' < x < 90^0,$$

ajungând la valoarea $(-0{,}00390)$ pentru x egal cu 90^0.

Mergând mai departe cu calculele, găsim că y se anulează pentru

$$89^0\ 10' < x < 89^0\ 15'.$$

Luând scări convenabile se poate uşor construi şi curba variaţiei lui y.

Notă. 1°. Am propus problema 531 în Martie 1926 pentru a provoca aplicarea tablelor III, IV şi V a tablelor de logaritmi de oarece constatasem la examenul de intrare în Şcoala Politechnică că nu se cunosc aceste table. Enunţul ce am dat problemei 531 la pag. 11, Vol. VI, conţinea o eroare de imprimare, anume se cerea *să se arate că*

$$\sin x < \text{arctg}\, x,$$

pentru x cuprins între 0^0 şi 90^0, în loc de a fi imprimat *x cuprins între 0^0 şi 89^0*.

Sub această formă enunţul ascundea mai mult o proprietate geometrică de cât o aplicaţie numerică a tablelor de logaritmi. De aceia i-am rectificat enunţul la pag. 122, Vol IX. După această schimbare am primit o soluţie *exactă* de la d-l *T. Marşieu* (pe când era elev în Şc. Polichnică din Timişoara). D-sa pleacă de la

$$y' = \cos x - \frac{1}{x^2+1},$$

dă lui x diferite valori numerice (6 la număr) calculează şi construeşte curbele

$$z = \cos x \text{ şi } u = \frac{1}{x^2+1}$$

şi deduce pe y, căruia î-i construeşte curba exactă.

2°. D-l *N. N. Mihăileanu* (pe când era elev în clasa VI lic. din Constanţa), a procedat ca în soluţia ce am dat la început, luând pentru x numai valorile 30°, 45° şi 60° şi calculând pe arctg x aproximativ fără a face uz de tablele de logaritmi.

O cale analoagă cu cea de la 2°, dar cu rezultate mai îndepărtate de adevăr a urmat d-l *Em. Mereuţă* (când era elev în Şc. Politechnică din Bucureşti).

3°. Problema se poate rezolva uşor făcând uz de radianţi.

Gh. B.

PROBLEME PROPUSE

1809. — Se cer numerile întregi A, B, C care verifică relaţia:

$$A^2 - 4B^2 = 3ABC.$$

EMILIAN MEREUTA

1810. Dacă laturile unui triunghiu dreptunghic se exprimă prin numere întregi, aria lui se exprimă printr'un număr divizibil cu 6.

CORNELIU POPESCU

1811. — Să se arate că:

$$C_5^5 C_n^1 - C_5^1 \sum_{i=0}^{3} C_n^{5-i} C_{4n}^i + C_5^2 C_n^2 \sum_{i=0}^{1} C_{i+2}^1 C_n^{3-i} C_n^i = n^5.$$

MARIA NEUMANN

1812. — Să se arate că într'un patrulater convex inscriptibil, suma patratelor laturilor plus de două ori produsul diagonalelor, este mai mică de cât produsul sumei diagonalelor cu perimetrul patrulaterului.

LT. C. D IONESCU-TIU

1813. — Pe o dreaptă D se consideră două puncte A şi M, iar în afara dreptei un punct B. Se notează cu (C) cercul circumscris triunghiului A B M şi cu (C') cercul ortogonal primului şi trecând prin punctele B şi M.

Să se arate că dacă punctul M se mişcă pe dreapta D, A şi B rămânând fixe:

1°. Cercul (C') trece prin două puncte fixe.

2°. Mijlocul segmentului C C' descrie o dreaptă.

VASILE VASU

1814. — Se consideră un exagon înscris într'un cerc a cărui diagonale principale sunt diametrii cercului circumscris şi un punct arbitrar M pe cerc. Să se arate că suma produselor distanţelor acestui punct la două laturi opuse a exagonului este constantă.

V. THÉBAULT

1815. — Să se arate că patrulaterul cu laturile pe dreptele

$$c\,x \pm a\,y - a^2 = 0$$
$$c\,x \pm a\,y + a^2 = 0,$$

este circumscris elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (a^2 - b^2 = c^2),$$

iar punctele de tangenţă formează un dreptunghiu. Insemnând s_1, s_2 respectiv ariile patrulaterului şi dreptunghiului, iar cu A A', B B' axele elipsei, avem:

$$\overline{A\,A'} \cdot \overline{B\,B'} = \sqrt{2\,s_1\,s_2}.$$

STEFAN MUSTA

1816. — Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = a\,(sp^2\,\theta + cp^2\,\theta) \\ y = 2\,a\,sp\,\theta\,cp\,\theta. \end{cases}$$

Să se determine unghiul θ corespunzător unui punct P al configuraţiei şi invers.

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Abramescu Mariana Pop (1757, 1761, 1774, 1779, 1794, 1797, 1799); *Aman V. Constantin* (P. 1668, 1672); *Bakonyi C.* (1684, 1719, 1735, 1768, 1799); *Borneas Marius* (1730, 1760); *Chintescu Matei* (1757, 1763, 1785, 1789); *Costescu G. Ioan* (1770); *Damianof Ştefan* (1696, 1699, 1774); *Deheleanu Gheorghe* (P., 1585, 1652, 1674, 1681, 1682, 1690, 1697, 1699, 1707, 1729, 1745, 1746, 1760, 1776, 1777, 1778, 1783, 1785); *Dragomir Ev. Adrian* (1699, 1789); *Logofătu M. Ion* (1683); *Lupescu Corneliu* (P., 1668, 1688, 1746, 1751, 1760, 1776, 1777); *Maior Gheorghe* (1794, 1799, 1807); *Naneş Cornelia* (N); *Pătruţă Chiril* (1696, 1699, 1778); *Ţarălungă Gh. Savel* (1793); *Văduva F. Marin* (P, 1561); *Voştinariu Gheorghe* (1774, 1783, 1786); *Zamfirescu Gh. I.* (P).

INFORMAŢIUNI

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL XII-LEA

care a început în Martie 1939.

Costul *special* a unui abonament este de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Pentru anul al XII, care a început în Martie 1939, s'au primit până acum la Redacţia „R. M. T." următoarele abonamente:

1. *Prof. Sergescu P.*, Universitatea, Cluj.
2. *Dr. C. Borş*, Liceul Comercial Piatra-Neamţ.
3. *Dr. Mihail Botez.* Strada I. G. Duca 15, Piatra-Neamţ.
4. *Lt. C. Costăchescu.* Submarinul „Delfinul", Constanţa.
5. *Prof. Ion Rizescu.* Strada Mihăileanu 18, Constanţa (anul XII).

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XVIII, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care ev tual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

ANUL XIX FEBRUARIE 1940 No 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 DR. ERICH STERN: AU SUJET DES PRODUITS MAGIQUES ET PANMAGIQUES (SUITE).

2. EUGEN VISA: COORDONATE HIPERBOLICE.

3. NOTE MATEMATICE: 16.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 1653, 1696.

6. PROBLEME PROPUSE: 1817-1825.

7. TABLA DE MATERII.

8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XVIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului: .

Anul I, epuizat. Anii: II—XVIII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XIX — No. 12 TIMISOARA, FEBRUARIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

AU SUJET DES PRODUITS MAGIQUES ET PANMAGIQUES.

PAR LE DR. ERICH STERN
(AMSTERDAM)

V. *(suite)*

On sait qu'on appelle *panmagique* un carré, dans lequel la somme des termes est la même non seulement sur les n rangées, les n colonnes et les deux diagonales, mais encore sur les $2n-2$ *diagonales* dites *brisées*. Partant d'une case quelconque du carré, une diagonale brisée est marquée par les $n-1$ autres cases, qu'on rencontre, parallèlement à une diagonale principale, en se déplaçant *cycliquement*, c'est à dire, en convenant, quand on atteint un côté du carré, de passer au côté opposé, comme si ces côtés étaient juxtaposés. Ainsi, sur la fig. IV, les nombres 10, 6, 27, 8, 28, ou 10, 24, 4, 42, 9, etc. représentent des diagonales brisées.

Par analogie, nous appellerons *carrés à produits panmagiques* ceux qui présentent le même produit non seulement sur les rangées, colonnes et diagonales principales, mais aussi sur les diagonales brisées.

Dans ce qui suit, nous désignerons toujours par *diagonales* l'ensemble des diagonales principales et des brisées.

Certains de mes correspondants pensent qu'on ne peut pas construire des carrés à produits panmagiques pour $n=4$, „parce qu'il n'existe pas de carrés pandiagonaux eulériens pour cette valeur de n". D'autres déclarent que, pour $n=4k+2$, les carrés à produits panmagiques sont sûrement impossibles, parce qu'il n'existe pas de carrés panmagiques ordinaires pour ces valeurs.

Les uns et les autres se trompent. La seule valeur, pour laquelle il n'existe pas de carrés à produits panmagiques, est $n=3$.

Pour $n=4$, on obtient des abaques convenables, en choisissant simplement les nombres des fig. I. et II., de telle sorte qu'on ait

$$a_1 a_4 = a_2 a_3 \qquad \text{et} \qquad b_1 b_2 = b_3 b_4 .$$

On peut prendre, par exemple:

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1$$
$$a_2 = 2 \qquad b_2 = 20$$
$$a_3 = 3 \qquad b_3 = 4$$
$$a_4 = 6 \qquad b_4 = 5.$$

Cela donne le carré *jig. XV.*, avec le produit panmagique

$$2^2 \times 3^2 \times 4^2 \times 5^2 = 5!^2 = 120^2 = 14400.$$

1	40	12	30
24	15	2	20
10	4	120	3
60	6	5	8

Fig. XV.

Les exemples indiqués plus haut pour $n=5$ et $n=7$ fig. IV. et IX.) sont des carrés à produits panmagiques, parce que les abaques d'où ils sont tirés sont des carrés latins pandiagonaux, c'est à dire, contenant chaque élément une fois dans chaque rangée, colonne et diagonale.

VI

Le fait qu'il n'existe point, pour $n=4k+2$, de carrés panmagiques ordinaires en nombres consécutifs [6], ne gêne en rien la construction de carrés

[6]) La preuve en a été donnée pour la première fois par S. ROBERTS, dans *Proc. London Math. Soc.* XXIV (1892), pp. 37—53 et d'une autre façon par G. E. RAYNOR dans *Sphinx* VIII (1938), pp. 33—36.

à produits panmagiques. Pour le démontrer, dans le cas $n = 6$, nous procéderons comme il suit:

Formons la première rangée d'un carré A avec 6 éléments différents, a, b, c, d, e, f.

Nous en tirons la première colonne, commençant par a, en sautant chaque fois $\frac{n}{2} = 3$ éléments cycliquement, c'est-à-dire en supposant que le dernier terme *(f)* s'accole au premier *(a)*.

Les autres rangées seront formées avec la même ordonnance cyclique que la première.

Nous aurons ainsi la *fig. XVI.*

a	b	c	d	e	f
d	e	f	a	b	c
a	b	c	d	e	f
d	e	f	a	b	c
a	b	c	d	e	f
d	e	f	a	b	c

A. Fig. XVI.

Chaque rangée de ce carré contient six éléments différents, chacun une fois, et donne le produit $abcdef$.

Chaque colonne contient deux éléments différents, chacun répété trois fois; les produits des colonnes sont donc $(ad)^3$, $(be)^3$ et $(cf)^3$.

Chaque diagonale contient trois éléments différents, répété chacun deux fois; les diagonales ont ainsi pour produits $(ace)^2$ et $(bdf)^2$.

Pour que tous ces produits soient égaux, il faut que $abcdef$ soit une 2me et aussi une 3e puissance, donc une 6e puissance.

Posons

$$abcdef = p^6$$

il faut avoir

$$ad = be = cf = p^2$$

et

$$ace = bdf = p^3.$$

Dans ce but nous pourrons supposer

$$p = uv$$

et prendre un des deux groupes de valeurs suivantes:

I.	ou bien	II.
$a = 1$		$a = u$
$b = u$		$b = v$
$c = u^2 v$		$c = v^2$
$d = u^2 v^2$		$d = u v^2$
$e = u v^2$		$e = u^2 v$
$f = v$		$f = u^2$.

Si nous choisissons le groupe I. et si nous posons $u = 2$, $v = 4$, nous avons la carré A′ *(fig. XVII.)* qui donne dans chaque rangée, colonne et diagonale le produit $2^6 \times 4^6 = 2^{18}$.[7]

1	2	16	64	32	4
64	32	4	1	2	16
1	2	16	64	32	4
64	32	4	1	2	16
1	2	16	64	32	4
64	32	4	1	2	16

A′ Fig. XVII.

Un tel carré peut se construire de bien des manières différentes. Si nous modifions la méthode employée dans la construction de A, en sautant cycliquement $\frac{n}{3} = 2$ éléments au lieu de 3 de la première rangée, pour former la première colonne[8], nous obtenons le carré B *(fig. XVIII)*. Dans ce carré,

a	b	c	d	e	f
c	d	e	f	a	b
e	f	a	b	c	d
a	b	c	d	e	f
c	d	e	f	a	b
e	f	a	b	c	d

B. Fig. XVIII.

les rangées et les diagonales droites donnent le produit $abcdef$, les colonnes, les produits $(ace)^2$ et $(bdf)^2$ et les diagonales gauches, les produits $(ad)^3$, $(be)^3$ et $(cf)^3$.

[7]) Si l'on fait, dans la fig. XVI, $a = 0$, $b = 1$, $c = 4$, $d = 6$, $e = 5$, $f = 2$, on obtient un carré panmagique à *somme* $a + b + c + d + e + f = 3(a + d) = 3(b + e) = 3(c + f) = 2(a + c + e) = 2(b + d + f) = 18$. En prenant les termes de ce carré comme exposants de la base 2, on retombe sur la fig. XVII.

[8]) Les carrés fig. V. et VII. ont été formés de cette manière, tandis que les carrés fig. VI. et VIII l'ont été par la méthode employée pour la fig. XVI.

En superposant A et B, chaque élément d'un des carrés rencontre une fois chaque élément de l'autre.

Pour B, nous choisirons les valeurs II. (on pourrait aussi bien prendre les valeurs I.). Si l'on pose $u = 3$, $v = 5$, on a le carré B′ *(fig. XIX.)*, qui donne le produit $3^6 \times 5^6$ dans chaque rangée, colonne et diagonale.

3	5	25	75	45	9
25	75	45	9	3	5
45	9	3	5	25	75
3	5	25	75	45	9
25	75	45	9	3	5
45	9	3	5	25	75

B′. XIX.

En multipliant A′ par B′, on obtient le carré *fig. XX.*, composé de 36 nombres différents, avec le produit panmagique

$$2^6 \times 3^6 \times 4^6 \times 5^6 = 5!^6 = 120^6 = 2\,985\,984\,000\,000.$$

3	10	400	4800	1440	36
1600	2400	180	9	6	80
45	18	48	320	800	300
192	160	100	75	90	144
25	150	720	576	96	20
2880	288	12	5	50	1200

A′ B′. Fig XX.

Il présente, en outre, la propriété particulière, que deux termes arbitraires, situés dans des cases congruentes dans les moitiés droite et gauche du carré, donnent le produit $5!^2 = 14400$. Deux cases analogues, dans les fig. XVI. et XVIII., sont toujours occupées par une des paires ad, be et cf, qui, d'après notre construction, donnent dans A le produit $2^2 \times 4^2$ et dans B le produit $3^2 \times 5^2$.

VII.

L'idée des carrés magiques a été souvent appliquée à d'autres figures de nombres: c'est ainsi qu'on a construit des Cubes, Etoiles, Cercles, Rosettes et autres figures magiques (c'est-à-dire à sommes égales). Le problème des produits magiques peut s'étendre à toutes ces figures Nous donnons *(fig. XXI.)* un exemple du genre le plus simple

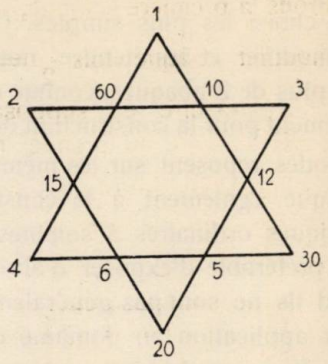


Fig XXI.

sur une étoile à six pointes, qui est occupé par 12 nombres différents: 4 nombres en ligne droite ont pour produit $\left(\frac{5!}{2}\right)^2 = 3600$.

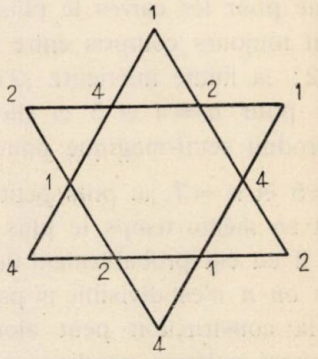


Fig. XXII.

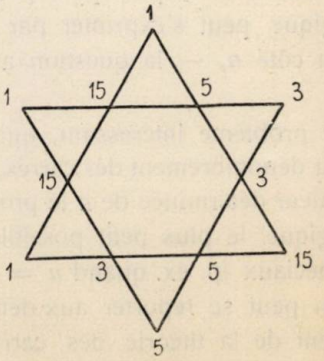


Fig. XXIII

L'étoile s'obtient par la multiplication des deux abaques *fig. XXII.* et *XXIII.*

VIII.

Les remarques, qui précèdent, sont bien loin d'épuiser le thème. C'est avec intention que, parmi les nombreuses méthodes qu'on peut employer, nous avons choisi les plus simples. On peut facilement les modifier et les étendre, notamment par l'emploi de plus de 2 abaques, comme nous l'avons fait ici seulement pour la construction de la fig. XIV.

Ces méthodes reposent sur les mêmes principes, qu'on applique également à la construction des figures magiques ordinaires à sommes constantes. Il est donc préférable d'exposer d'abord ces principes, quand ils ne sont pas généralement connus, et alors leur application au domaine des Produits magiques n'offre rien de bien nouveau.

Il n'en est pas de même, quand il s'agit du plus petit produit magique (ou panmagique) possible, problème qui n'a pas d'analogue dans la construction de figures à sommes constantes en nombres consécutifs. D'après les essais exposés ci-dessus, il semble que pour les carrés le plus petit produit magique soit toujours compris entre $(2n-1)!$ et $(2n-1)! \times 2$; la limite inférieure $(2n-1)!$ n'est atteinte que pour $n=4$ et 5 et elle est aussi le plus petit produit semi-magique pour $n=3$.

Pour $n=5$ et $n=7$, le plus petit produit panmagique est en même temps le plus petit produit magique, et il en est probablement de même pour tous les cas où n n'est divisible ni par 2, ni par 3, parce que la construction peut alors se faire à l'aide d'un carré eulérien pandiagonal.

Quant à savoir si le plus petit produit magique ou panmagique peut s'exprimer par une fonction générale du côté n, — la question a besoin d'être étudiée.

Un autre problème intéressant, qui se présente, est celui du dénombrement des carrés, qui donnent pour une valeur déterminée de n le produit magique (ou panmagique) le plus petit possible. Dans certains cas spéciaux (p. ex. quand $n=4$ ou bien est premier), on peut se reporter aux dénombrements, qui découlent de la théorie des carrés magiques ordinaires; mais pour le cas général, il faut tenir compte de la divisibilité des nombres avec lesquels on forme les abaques.

Ainsi, le domaine encore peu connu des produits magiques se prête à beaucoup de recherches intéressantes. Le but de cet article est d'appeler l'attention sur cette question.

Traduit de l'allemand par le Général E. Cazalas (Versailles).

COORDONATE HIPERBOLICE

DE

EUGEN VIŞA

PROFESOR.

In vederea unei lucrări ce întreprind, am simţit nevoia de a introduce un nou sistem de coordonate pentru determinarea poziţiei unui punct în plan, analog sistemului clasic de coordonate polare şi căruia am fost condus a-i da numele de *sistem de coordonate hiperbolice.*

Consideraţiuni generale.

Definiţii.

Fie în plan două axe rectangulare $x'x$ şi $y'y$, al căror punct de întâlnire să-l notăm cu O (fig. 1).

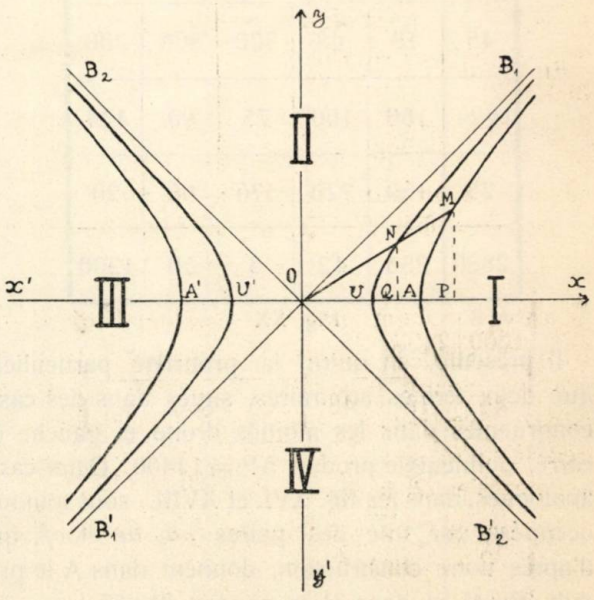


Fig. 1.

Considerăm în acelaş timp şi bisectoarele $B_1'B_1$ şi $B_2'B_2$ ale unghiurilor formate de aceste axe.

Ele împart planul în regiunile:

$$I = B_2' O B_1, \quad II = B_1 O B_2, \quad III = B_2 O B_1',$$

$$IV = B_1' O B_2.$$

Pentru motive care se impun, vom spune că regiunile I, III formează domeniul real, regiunile II, IV formează domeniul imaginar, iar punctele celor două bisectoare formează domeniul frontieră.

Să vedem cum definim *coordonatele hiperbolice* pentru punctele fiecăruia din aceste domenii.

1°. Prin fiecare punct $M(x, y)$ al domeniului real, trece o ramură de hiperbolă echilateră definită prin ecuația

$$x^2 - y^2 = \varrho^2 \tag{1}$$

în care ϱ, abstracție făcând de semn, este bine determinat, de îndată ce ne dăm punctul M. Pentru a nu exista însă nici această ambiguitate, vom conveni a considera cantitatea ϱ ca pozitivă sau negativă, după cum punctul M se găsește respectiv în regiunea I sau III.

In fig. 1. se vede că pentru punctele din regiunea I avem $\varrho = \overline{OA}$, iar pentru cele din regiunea III, avem $\varrho = \overline{OA'}$. Deci cantitatea ϱ, pe care o numim *rază hiperbolică* a punctului dat, este afectată de semnul + sau —, conform convenției de mai sus.

Dar este evident că ϱ, fiind același pentru toate punctele uneia din ramurile hiperbolei (1), nu poate singulariza un punct determinat al ei.

De aceea mai considerăm hiperbola de ecuație:

$$x^2 - y^2 = 1, \tag{2}$$

pe care o numim *hiperbolă fundamentală*. Unim O cu M și fie N punctul de intersecție al dreptei OM cu ramura hiperbolei (2) situată de aceeași parte a axei y-cilor ca și ramura hiperbolei (1) ce trece prin M și U punctul în care această ramură a hiperbolei (2) taie axa x-ilor.

Notăm încă cu θ dublul ariei sectorului hiperbolic OUN, adică

$$\theta = \pm 2 \text{ aria } (OUN),$$

convenind a lua semnul + sau —, după cum axa transversă Ox trebue rotită pentru a se așeza peste ON, în sensul direct (trigonometric), sau invers. Numim θ, *argument hiperbolic* al punctului M.

Cele două cantități algebrice ϱ și θ astfel definite, le numim coordonatele hiperbolice ale punctului M.

Este clar că unui punct M din domeniul real îi corespunde un sistem unic de coordonate hiperbolice (ϱ, θ) și invers, unui sistem dat de coordonate hiperbolice îi corespunde un singur punct în acest domeniu.

2°. Fie acum $M'(x', y')$ un punct al domeniului imaginar. Pentru a-i defini coordonatele hiperbolice, să considerăm simetricul său $M(x, y)$ față de bisectoarea $B_1' B_1$ (fig. 2).

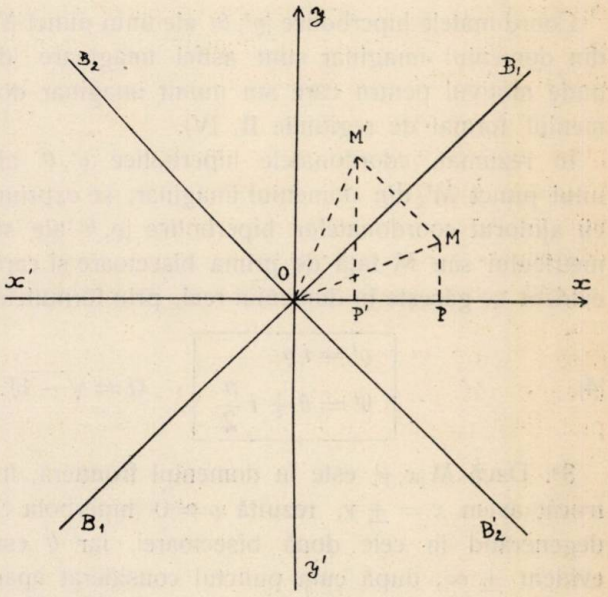


Fig. 2.

Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice OMP și OM'P', deducem:

$$\begin{cases} x = y' \\ y = x'. \end{cases} \tag{3}$$

Cum însă,

$$x^2 - y^2 = \varrho^2,$$

în virtutea relațiilor (3), rezultă:

$$x'^2 - y'^2 = (i\varrho)^2, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Deci, pentru raza hiperbolică ϱ' a punctului M' avem expresia

$$\varrho' = i\varrho, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Pe de altă parte, dacă θ' este a doua coordonată

hiperbolică a lui M', în baza definiției cunoscute a funcțiunilor hiperbolice, precum și a relațiilor (3), avem că:

$$x = ch\,\theta = y' = sh\,\theta'$$

$$y = sh\,\theta = x' = ch\,\theta',$$

de unde, prin împărțire, deducem:

$$th\,\theta' = \cot h\,\theta.$$

Rezolvind această ecuație în raport cu θ' și luând numai determinația principală, obținem

$$\theta' = \theta + i\frac{\pi}{2}, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Coordonatele hiperbolice (ϱ', θ) ale unui punct M' din domeniul imaginar sunt astfel imaginare (de unde motivul pentru care am numit imaginar domeniul format de regiunile II, IV).

In rezumat, coordonatele hiperbolice (ϱ', θ) ale unui punct M' din domeniul imaginar, se exprimă cu ajutorul coordonatelor hiperbolice (ϱ, θ) ale simetricului său M față de prima bisectoare și care, evident se găsește în domeniul real, prin formulele:

$$(4) \qquad \boxed{\begin{aligned} \varrho' &= i\,\varrho \\ \theta' &= \theta + i\frac{\pi}{2} \end{aligned}}, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

3°. Dacă $M(x, y)$ este în domeniul frontieră, întrucât avem $x = \pm y$, rezultă $\varrho = 0$ (hiperbola (1) degenerând în cele două bisectoare), iar θ este evident $\pm\infty$, după cum punctul considerat aparține respectiv primei bisectoare, sau celei de a doua.

Relațiile:

$$(5) \qquad \varrho = 0, \qquad \theta = \pm\infty$$

caracterizează prin urmare punctele acestui domeniu. Este interesant însă de observat că, pentru punctele frontierei, coordonatele hiperbolice (5) nu pot singulariza aceste puncte.

Coordonatele hiperbolice ale originei O, sunt evident

$$(6) \qquad \varrho = 0, \qquad \theta = \text{nedeterminat},$$

fiindcă OM are orice direcție (M coincizând cu O) și aria OUN este oarecare.

Dacă se consideră însă origina ca aparținând unei curbe ce trece prin ea și ale cărei argumente hiperbolice se deduc după o lege anumită, atunci, pentru acel caz, vom conveni să determinăm argumentul hiperbolic al originei după aceeași lege.

Așa de exemplu, dacă presupunem origina ca aparținând axei x-ilor, vom lua pentru argumentul ei hiperbolic valoarea 0, deoarece, toate punctele acestei axe sunt caracterizate prin relația

$$(7) \qquad \theta = 0$$

și care constitue astfel ecuația acestei axe în sistemul de coordonate hiperbolice.

La fel, vom lua pentru argumentul hiperbolic al originei valoarea $\pm\infty$ în cazul când se consideră acesta ca aparținând primei sau celei de a doua bisectoare, după cum s'a văzut și mai sus.

Relații între coordonatele hiperbolice și cele carteziene.

Ne propunem în cele de mai jos a găsi relațiile cari leagă între ele coordonatele hiperbolice și cele carteziene.

1°. Fie M un punct din regiunea I a domeniului real situat deasupra axei x-ilor; (x, y) coordonatele sale carteziene și (ϱ, θ) coordonatele lui hiperbolice (fig. 1). Fie încă N punctul corespunzător al hiperbolei fundamentale de ecuație

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Notând respectiv cu P și Q proiecțiile punctelor M și N pe axa x-ilor, din observarea figurei, deducem relațiile:

$$\overline{OQ} = ch\,\theta$$

$$\overline{QN} = sh\,\theta.$$

De asemenea mai putem scrie și relațiile:

$$\overline{OP} = x$$

$$\overline{PM} = y.$$

Pe de altă parte, din asemănarea triunghiurilor dreptunghice OPM și OQN, avem:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{QN}},$$

adică

$$\frac{x}{ch\,\theta} = \frac{y}{sh\,\theta},$$

de unde, aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor, obținem:

$$(8)\quad \frac{x}{ch\,\theta}=\frac{y}{sh\,\theta}=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{ch^2\,\theta-sh^2\,\theta}}=\sqrt{x^2-y^2}$$

căci

$$ch^2\,\theta-sh^2\,\theta=1.$$

Am luat înaintea radicalului semnul pozitiv, căci punctul considerat are atât coordonatele hiperbolice cât şi cele carteziene, pozitive.

Ţinând acum seama că punctul nostru se găseşte pe hiperbola de ecuaţie cartezianã:

$$x^2-y^2=\varrho^2,$$

rezultă că relaţiile (8), la rândul lor se scriu:

$$\frac{x}{ch\,\theta}=\frac{y}{sh\,\theta}=\varrho$$

de unde, deducem numai decât:

$$(9)\quad \boxed{\begin{array}{l} x=\varrho\,ch\,\theta \\ y=\varrho\,sh\,\theta \end{array}}.$$

Relaţiile (9) ne dau astfel expresiile coordonatelor carteziene în funcţie de cele hiperbolice şi cari, prin consideraţii de simetrie faţă de cele două axe şi faţă de prima bisectoare, se constată cu uşurinţă că sunt aplicabile oricărui punct, fie din domeniul real, fie din cel imaginar.

2°. Considerând grupul de relaţii (9) ca un sistem de ecuaţii în ϱ şi θ, prin rezolvarea lui în raport cu aceste coordonate, obţinem formulele:

$$(10)\quad \boxed{\begin{array}{l} \varrho=\pm\sqrt{x^2-y^2} \\ \theta=\arg th\,\dfrac{y}{x} \end{array}},$$

cari exprimă coordonatele hiperbolice cu ajutorul celor carteziene.

In privinţa celei dintâi din aceste formule, avem de precizat că, înaintea radicalului va trebui să luăm semnul + sau —, după cum punctul considerat se găseşte respectiv în regiunile I, II sau III, IV.

Dacă, în anumite cazuri, nu ne interesează chiar expresia argumentului hiperbolic θ, ci expresiile funcţiunilor sale hiperbolice $ch\,\theta$ şi $sh\,\theta$, atunci a doua formulă din (10) se va înlocui cu următoarele:

$$(10')\quad \boxed{\begin{array}{l} ch\,\theta=\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2-y^2}} \\ sh\,\theta=\dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2-y^2}} \end{array}},$$

cari se stabilesc destul de uşor.

Evident, înaintea radicalilor din formulele (10), vom hotărî semnul după aceleaşi criterii pe cari le-am amintit şi mai sus.

Curbe în coordonate hiperbolice

Ecuaţia unei curbe în coordonate carteziene fiind:

$$(11)\quad f(x,y)=0,$$

în baza formulelor de transformare (9), rezultă că ecuaţia aceleiaşi curbe în coordonate hiperbolice va fi:

$$(12)\quad f(\varrho\,ch\,\theta,\ \varrho\,sh\,\theta)=0.$$

Invers, dacă

$$(13)\quad \varphi(\varrho,\theta)=0$$

este ecuaţia unei curbe în coordonate hiperbolice, aplicând formulele de transformare (10), găsim că ecuaţia aceleiaşi curbe în coordonate carteziene este:

$$(14)\quad \varphi\left(\pm\sqrt{x^2-y^2},\ \arg th\,\frac{y}{x}\right)=0.$$

In particular, dacă ecuaţia (13) este de forma:

$$(13')\quad \varphi(\varrho,\ ch\,\theta,\ sh\,\theta)=0,$$

atunci, în baza primei formule din (10) şi a formulelor (10'), rezultă că ecuaţia (14) va fi de forma:

$$(14')\quad \varphi\left(\pm\sqrt{x^2-y^2},\ \frac{x}{\pm\sqrt{x^2-y^2}},\ \frac{y}{\pm\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0.$$

Aplicaţii.

Vom face acum două aplicaţii simple ale celor stabilite. Fiind însă vorba de curbe în coordonate hiperbolice, vom conveni, pentru simplificarea limbajului, să numim *reale* curbele sau ramurile de curbe situate în domeniul real şi imaginare pe cele situate în domeniul imaginar.

Problema 1. *Se cere configuraţia care în coordonate hiperbolice are ecuaţia:*

$$(15)\quad \varrho=a,\qquad (a,\ \text{real}).$$

Soluţie. Transpunând ecuaţia dată în coordonate carteziene, avem:

$$\pm\sqrt{x^2-y^2}=a$$

unde semnul radicalului este acelaş cu semnul lui a.

Raţionalizând această ecuaţie, obţinem:

$$(15')\quad x^2-y^2=a^2$$

ceeace ne arată că avem de a face cu o hiperbolă echilateră cu centrul în origină şi având axa x-ilor ca axă transversă (fig. 3).

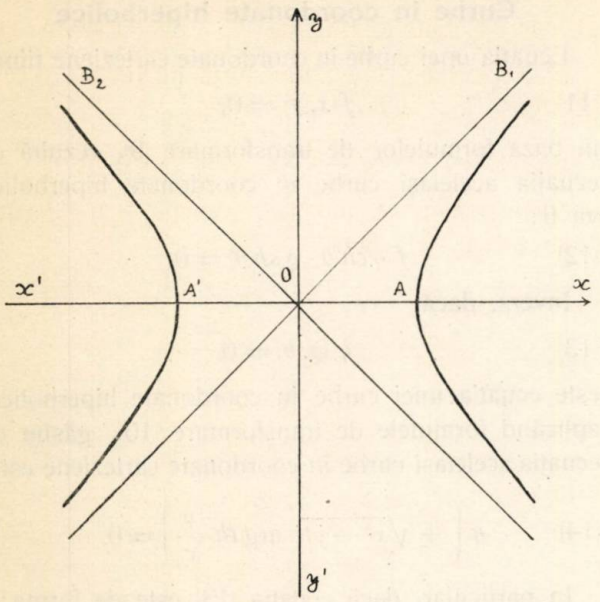


Fig. 3.

Din această hiperbolă trebue să reţinem însă numai ramura ei din dreapta axei y-cilor, sau aceea din stânga acestei axe, după cum a este respectiv pozitiv sau negativ.

Conchidem prin urmare că ecuaţia (15) reprezintă în coordonate hiperbolice o ramură de hiperbolă echilateră reală cu centrul în origină şi având axa x-lor ca axă transversă.

Problema 2. *Se cere configuraţia care în coordonate hiperbolice are ecuaţia:*

(16) $\theta = \alpha, \quad (\alpha, \text{ real}).$

Soluţie. Transpunând iarăşi ecuaţia dată în coordonate carteziene, avem:

$$\arg th \frac{y}{x} = \alpha$$

ceeace se mai poate scrie şi sub forma:

$$\frac{y}{x} = th\, \alpha$$

sau încă sub forma:

(16') $$y = x\, th\, \alpha.$$

Ecuaţia (16') care este echivalenta ecuaţiei (16) ne spune că avem de a face cu o dreaptă ce trece prin origină (fig. 4), al cărei coeficient unghiular este

$$m = th\, \alpha.$$

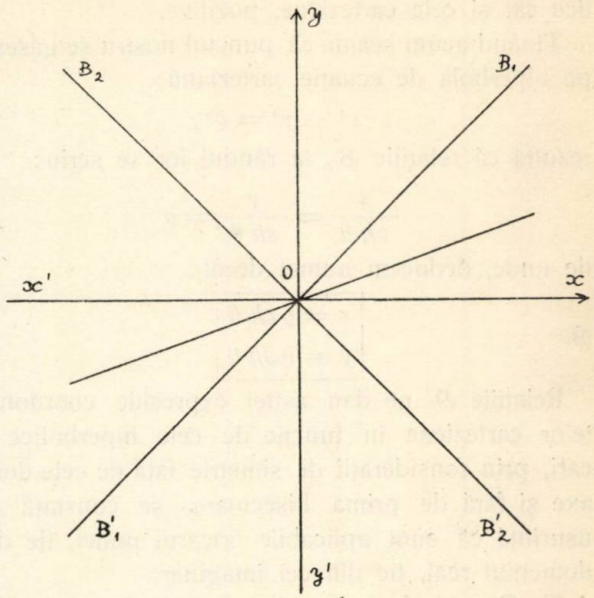


Fig. 4.

Mai mult încă, ţinând seama că pentru argumente reale, tangenta hiperbolică variază numai între -1 şi $+1$, deducem că dreapta reprezentată de ecuaţia hiperbolică (16 este în întregime situată în domeniul real, adică este o dreaptă reală în sensul celor convenite.

Incheiere.

Expunerea succintă din cuprinsul acestui articol, cred că va fi putut deştepta într'o măsură oarecare interesul pentru noţiunile pe cari le-am prezentat, mai ales că ele îşi au încă numeroase şi variate aplicaţii în domeniul Geometriei.

In ceeace mă priveşte n'am stăruit totuşi mai mult asupra lor, dat fiind că lucrarea amintită ce întreprind şi pe care de asemenea voiu căuta s-o prezint cât mai curând, reclamă numai ceeace constitue esenţialul din aceste noţiuni.

NOTE MATEMATICE

16. — *Transformarea* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$.

1. Am arătat în numărul trecut al „R. M. T."[1] că, dacă avem un punct P de coordonate polare (ϱ, θ), O fiind polul şi Ox axa polară, atunci transformatul său $(\overline{OA_1}, \varphi_1)$, unde

$$(1) \qquad \overline{OA_1} = F_1(\varrho, \theta), \qquad 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2},$$

se află în felul următor: Pe axa $x'x$ se ia lungimea $\overline{OA_1}$ definită de relaţia (1), de partea unde este P faţă de axa $y'y$ (fig. 1) şi apoi se duce din A_1 dreapta A_1B_1 de partea unde se află raza polară OP, astfel ca

$$(2) \qquad \sphericalangle OA_1B_1 = \varphi_1.$$

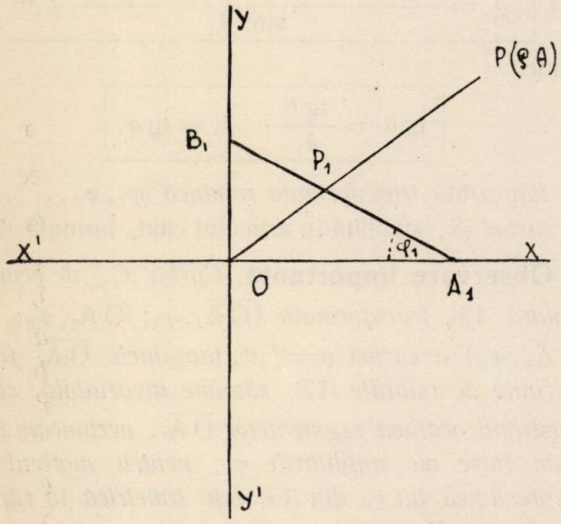


Fig. 1.

Punctul P_1, intersecţia lui A_1B_1 cu OP, este transformatul $(\overline{OA_1}, \varphi_1)$ al punctului P.

Am mai arătat că, între coordonatele polare (ϱ_1, θ) ale lui P_1 şi (ϱ, θ) ale lui P există relaţia (44), din articolul menţionat, anume:

$$(3) \qquad \boxed{\varrho_1 = \frac{k_1 \, sp\, \alpha_1}{\sin\theta} F_1(\varrho, \theta)},$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_1}, \; k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1},$$

unghiul α_1 obţinându-se simplu şi prin construcţie geometrică, cum se vede (fig. 7), articolul menţionat.

2. Dacă acum luăm transformatul $(\overline{OA_2}, \varphi_2)$ al punctului P_1, având

$$\overline{OA_2} = F_2(\varrho_1, \theta), \qquad 0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2},$$

obţinem analog ca mai sus, punctul $P_2(\varrho_2, \theta)$ definit evident de relaţia:

$$(4) \qquad \boxed{\varrho_2 = \frac{k_2 \, sp\, \alpha_2}{\sin\theta} F_2(\varrho_1, \theta)},$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_2}, \; k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Dacă în (4) înlocuim ϱ_1 prin valoarea sa din (3), avem o relaţie între coordonatele polare ale punctelor P_2 şi P şi pentru aceasta *numim punctul P_2 transformatul $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2)$ al punctului P.*

3. Dacă ne dăm

$$(5) \quad \overline{OA_i} = F_i(\varrho_{i-1}, \theta), \quad 0 \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}, \; (i = 1, 2, \ldots, n),$$

putem spune mai general că, *transformatul $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ al unui punct $P(\varrho, \theta)$ este un alt punct $P_n(\varrho_n, \theta)$, definit de relaţia*

$$(6) \qquad \boxed{\varrho_n = \frac{k_n \, sp\, \alpha_n}{\sin\theta} F_n(\varrho_{n-1}, \theta)},$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_n}, \quad k_n = \operatorname{tg}\varphi_n},$$

în care trebue să înlocuim succesiv expresiile razelor polare $\varrho_n, \varrho_{n-1}, \ldots, \varrho_1$ ale punctelor intermediare $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_1$, prin valorile lor respective,

$$(7) \qquad \boxed{\varrho_i = \frac{k_i \, sp\, \alpha_i}{\sin\theta} F_i(\varrho_{i-1}, \theta)},$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_i}, \quad k_i = \operatorname{tg}\varphi_i},$$

$$(i = n-1, \; n-2, \ldots, 2, 1)$$

iar $\varrho_0 \equiv \varrho$.

[1]) *V. Alaci.* Transformarea rombică şi antirombică. Transformările $(\overline{OA}, \varphi)$, „R. M. T.", Anul XIX, No 11, p. 141.

In felul acesta, coordonatele (ϱ_n, θ) ale punctului P_n, sunt legate de coordonatele (ϱ, θ) ale punctului P şi putem spune că, *punctul* $P_n(\varrho_n, \theta)$ *este transformatul* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ *al punctului* $P(\varrho, \theta)$.

Transformata $(\overline{OA_1}, \varphi_1, \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ a unei curbe date.

4. Dacă avem o curbă oarecare (C) şi pentru fiecare punct al ei P, construim punctul P_n, transformatul său $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$, după cum am arătat, atunci locul geometric al lui P_n, când P descrie curba (C) este o altă curbă (C_n), *pe care o numim transformata* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots \overline{OA_n}, \varphi_n)$ *a curbei* (C).

Dacă,

$$\varrho = f(\theta) \tag{8}$$

este ecuaţia polară a curbei (C), atunci conform relaţiilor (6) şi (7), *ecuaţia polară a curbei* (C_n) *transformata* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ *a lui* (C), este

$$\boxed{\varrho_n = \frac{k_n\, sp\, \alpha_n}{\sin\theta} F_n(\varrho_{n-1}, \theta)}, \tag{9}$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_n}, \quad k_n = \operatorname{tg}\varphi_n},$$

în care trebuesc înlocuite razele polare succesive $\varrho_{n-1}, \varrho_{n-2}, \ldots, \varrho_1$ prin valorile lor

$$\boxed{\varrho_i = \frac{k_i\, sp\, \alpha_i}{sin\,\theta} F_i(\varrho_{i-1}, \theta)}, \tag{10}$$

unde:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_i}, \quad k_i = \operatorname{tg}\varphi_i},$$

$$(i = n-1,\ n-2, \ldots, 2, 1),$$

expresiunea lui ϱ_1 fiind

$$\boxed{\varrho_1 = F_1[f(\theta), \theta]}, \tag{11}$$

în baza relaţiei (8').

Cazuri particulare. 1°. Dacă particularizăm funcţiunile $F_i(\varrho_{i-1})$, care definesc lungimile $\overline{OA_i}$ din transformarea (9), luând de exemplu

$$\overline{OA_i} = F_i(\varrho_{i-1}, \theta) = \varrho_{i-1}\, \Phi_i(\theta), \tag{12}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \quad (\varrho_0 \equiv \varrho),$$

atunci *ecuaţia polară* (9) *a transformatei* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ *a curbei* (8), devine:

$$\boxed{\varrho_n = \frac{f(\theta)}{\sin^n\theta} \prod_{i=1}^{n} k_i\, sp\, \alpha_i\, \Phi_i(\theta)}, \tag{13}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_i}, \quad k_i = \operatorname{tg}\varphi_i},$$

unde s'a ţinut seamă de relaţiile (10), (11) şi (12).

2°. Dacă presupunem încă în (13),

$$\Phi_i(\theta) \equiv 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ea devine

$$\boxed{\varrho_n = \frac{k_1\, k_2 \ldots k_n\, sp\, \alpha_1\, sp\, \alpha_2 \ldots sp\, \alpha_n}{\sin^n\theta} f(\theta)}, \tag{14}$$

unde,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_i}, \quad k_i = \operatorname{tg}\varphi_i}$$

şi reprezintă *transformata rombică* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *a curbei* (8), stabilită în articolul citat, formula (20).

Observare importantă. *Curba* (C_n) *de ecuaţie polară* (13), *transformata* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; OA_2, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ *a curbei* $\varrho = f(\theta)$, *lungimele* $\overline{OA_i}$ *fiind definite de relaţiile* (12), *rămâne invariabilă, când păstrând ordinea segmentelor* $\overline{OA_i}$, *permutăm oricum între ele unghiurile* φ_i, *pentru motivul că expresiunea lui* ϱ_n *din* (13) *este simetrică în raport cu unghiurile* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Dacă avem un punct oarecare P a curbei $\varrho = f(\theta)$, *transformatul său* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ este un punct P_n, la care ajungem trecând prin punctele intermediare $P_i(\varrho_i, \theta)$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Dacă acum în *transformarea de mai sus,* păstrăm ordinea segmentelor $\overline{OA_i}$, dar permutăm oricum unghiurile φ_i, am arătat că obţinem acelaşi punct P_n, numai că punctele intermediare sunt diferite, fie ele $P_i'(\varrho_i', \theta)$. De aci rezultă, în baza relaţiilor (12) că segmentele $\overline{OA_i}$ din a 2-a transformare sunt şi ele diferite de acelea corespunzătoare primei transformări, cu excepţia lui $\overline{OA_1}$ de aceea vom

nota prin $\overline{OA_i'}$ $(i=2,3,\ldots n)$ segmentele din transformarea 2-a.

In adevăr, *în transformata* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$, în baza relaţiilor (12), avem

$\overline{OA_1} = \varrho\, \Phi_1(\theta)$, iar $\overline{OA_i} = \varrho_{i-1}\, \Phi_i(\theta)$, $(i=2,3\ldots,n)$

iar *în transformata* $(\overline{OA_1}, \varphi_{s_1}; \overline{OA_2'}, \varphi_{s_2}; \ldots \ldots; \overline{OA_n'}, \varphi_{s_n})$ unde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sunt într'o ordine oarecare numerile $1, 2, \ldots, n$, avem în baza aceloraşi relaţii (12),

$$\overline{OA_1} = \varrho\, \Phi_1(\theta), \quad \overline{OA_i'} = \varrho_{i-1}'\, \Phi_i(\theta), \quad (i=2,3,\ldots,n),$$

ambele transformări fiind efectuate asupra aceluiaşi punct $P(\varrho, \theta)$.

Iată o problemă precisă sugerată de această observare, în cazul $n=2$.

5. **Problemă.** *Dacă avem un punct* P *de coordonate polare* (ϱ, θ) *şi construim întâi transformatul său* $(\overline{OA_1}, \varphi; \overline{OA_2}, \psi)$ *şi apoi transformatul său* $(\overline{OA_1}, \psi; \overline{OA_2'}, \varphi)$, *în cazul particular al relaţiilor* (12), *obţinem în ambele cazuri acelaşi punct* P_2. $\left(0 \leq \varphi,\ \psi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Motivarea problemei reiasă din observarea de mai sus.

Construcţia care duce de la P la P_2 în cele două transformări din enunţ, se poate urmări cu uşurinţă în (fig. 2).

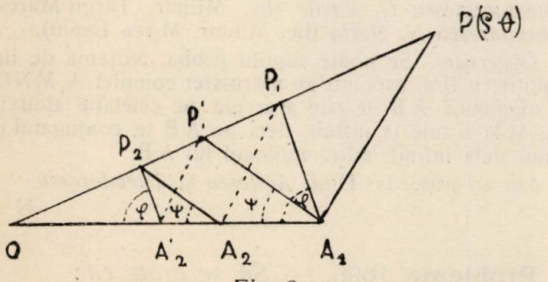


Fig. 2.

Prima transformare. S'a luat,

$$(15)\quad \begin{aligned} &\overline{OA_1} = \varrho\, \Phi_1(\theta), && \sphericalangle\, OA_1P_1 = \varphi, \\ &\overline{OA_2} = \overline{OP_1}\, \Phi_2(\theta), && \sphericalangle\, OA_2P_2 = \psi. \end{aligned}$$

A 2ª transformare. S'a luat

$$(16)\quad \begin{aligned} &\overline{OA_1} = \varrho\, \Phi_1(\theta), \ \text{(acelaşi)}, && \sphericalangle\, OA_1P_1' = \psi, \\ &\overline{OA_2'} = \overline{OP_1'}\, \Phi_2(\theta), && \sphericalangle\, OA_2'P_2 = \varphi. \end{aligned}$$

E de observat că segmentul $\overline{OA_2'}$ se poate obţine ducând $P_1'A_2'$ paralelă la P_1A_2, fiindcă din relaţiile (15) şi (16) rezultă,

$$\frac{\overline{OA_2}}{OA_2'} = \frac{\overline{OP_1}}{OP_1'}.$$

Observări. 1°. Privind (fig. 2), formată din triunghiul OA_1P, în care $\overline{OA_2}$ este arbitrar ca şi segmentele $\overline{A_1P_1}$, $\overline{A_1P_1'}$, pe când segmentul $\overline{OA_2'}$ este obţinut ducând $P_1'A_2' \parallel P_1A_2$, iar segmentele $\overline{A_2P_2}$, $\overline{A_2'P_2}$ sunt duse respectiv paralele la A_1P_1', A_1P_1, se pot formula diferite enunţuri geometrice.

2°. Luând P_n transformatul $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ al punctului P, am văzut că el rămâne neschimbat pentru orice permutare a unghiurilor φ_i. Prin urmare există un fascicol de $n!$ drepte diferite, acelea cu care se termină fiecare din cele $n!$ transformări $(\overline{OA_1}, \varphi_{s_1}; \overline{OA_2'}, \varphi_{s_2}; \ldots \ldots; \overline{OA_n'}, \varphi_{s_n})$ ce conduc de la P la P_n, care toate se întâlnesc pe raza polară O P a punctului P.

Şi această observare mai generală, poate sugera unele probleme de geometrie.

6. Ecuaţia (13) comparată cu ecuaţia (20) din articolul citat, ne îndreptăţeşte a afirma că, *transformata* $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots; \overline{OA_n}, \varphi_n)$ *a curbei* $\varrho = f(\theta)$, în care lungimele $\overline{OA_i}$ sunt definite de relaţiile

$$\overline{OA_i} = \varrho_{i-1}\, \Phi_i(\theta), \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

este identică cu *transformata rombică* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *a curbei* $\varrho = \Phi_1(\theta)\, \Phi_2(\theta) \ldots \Phi_n(\theta) f(\theta)$.

Iată o problemă sugerată de această proprietate şi aceea din observarea importantă de la No. 4:

7. **Problemă.** *Transformatul rombic* (φ, ψ) *al unui punct* $A(\varrho, \theta)$ *de pe spirala lui Archimede.*

$$\varrho = a\,\theta,$$

coincide cu transformatul $(\overline{OA_1}, \psi; \overline{OA_2}, \varphi)$ *al punctului* $B(\varrho, \theta)$ *de pe cercul*

$$\varrho = a,$$

dacă luăm de exemplu

$$\overline{OA_1} = \varrho\sqrt{\theta}, \qquad \overline{OA_2} = \varrho_1\sqrt{\theta}.$$

Concretizată geometric această problemă, exprimă o proprietate remarcabilă.

V. ALACI

INFORMAȚII.

Societatea Științifică de la Școala Politechnică din Timișoara a comemorat, în mod pios, un an de la dispariția marelui profesor, pedagog și profund creator în domeniul științei, *Gheorghe Țițeica.*

Au luat cuvântul d-nii profesori: *V. Alaci* (Timișoara) și *D. V. Ionescu* (Universitatea din Cluj).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XLV, No. 5, Ianuarie 1940 Algebra lui *Constantin Serbescu-lu,* de *I. Ionescu.* Impresiile contelui *Teleki* despre matematicieni străini, de *Victor Marian.* Asupra problemei 4567, de *Tiberiu Popoviciu.* Raportul comisiunei pentru acordarea premiului *„Nicolae G. Botea,* de *E. G. Botea, C. Ionescu-Bujor,* Ing. *D. Stoica.* Programa analitică hotărâtă pentru concursul *„Gazetei Matematice"* din anul 1940. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Boletin Matematico,* anul XII, No. 17, 18, 20, Buenos-Aires. Articolele și notele din *„Boletin Matematico",* de *B. I. Baidaf.* Relațiuni de geometrie coeuclidiană, de *Gutiérrez Novoa.* Soluțiile întregi ale ecuației

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_i\, x_j = 0,$$

de *G. G. Constantinescu.*

3. *Știință și Progres,* anul VI, Octomvrie-Decemvrie 1939. Rezolvarea ecuației de gradul IV, de Prof. *C. Ivănescu.* Integrale raționale de, elev *Ralea Valentin.* Alte articole. Probleme rezolvate și propuse.

4. *Pitagora,* anul V, No. 4, Ianuarie 1940. Intrebuințarea coordonatelor baricentrice în calculul ariilor și volumelor, de *P. Boldescu.* Asupra coeficienților dezvoltării produsului $\prod_{1}^{n}(x+i)$, de *I. Vișa.* Asupra triunghiurilor polar reciproce, de *N. Mihăileanu.* Studiul elementar al unui complex de drepte, de *A. Niculescu.* Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

5. *D. V. Ionesco.* L'application d'une formule de *T. J. Stieltjes* à un problème de M. *D. Pompeiu.*

6. *V. Thébault.* Géométrie du triangle et du tétraèdre.

7. *V. Thébault.* Sur des cercles associés à un triangle.

8. *Théophile T. Vescan.* La théorie des courbes définies comme l'intersection des deux surfaces représenteés paramétriquement.

9. *Ovid Enulescu.* Teorema lui *Rolle.*

10. *Dr. Crist. Predescu.* La pluie. L'évaporation.

11. *Dr. Crist. Predescu.* La température à Cluj.

12. *Dr. Crist. Predescu.* Humidité Atmosphérique La tension de la vapeur d'eau atmosphérique.

13. *Virgiliu G. Gheorghiu.* Forța electromotrice produsă prin mișcarea electrozilor în diferite soluții. (Teză).

14. *V. G. Gheorghiu* et *N. Calinicenco.* Relations entre la salinité de l'eau de la *Mer Noire* et la conductibilité électrique, la densité, ou l'indice de réfraction.

15. *Virgiliu G. Gheorghiu* et *N. Calinicenco.* Etude sur la variation de la conductibilité électrique de la *Mer Noire.*

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1653. — *Intr'un triunghiu* A B C, *pe mediana* AA_1 *se ia un punct* M *prin care se duce o paralelă la* A B *ce întâlnește pe* B C *în* D. B M *întâlnește pe* A C *în* P *și* A D *întâlnește pe* B M în N.

Să se arate că cercul de rază N B *și centru* N *trece prin* P.

DINU D. BUZNEA

Soluția I-a dată de D-l *Stelian Cetățeanu* (lic. Șincai, București). Din triunghiurile asemenea formate M N D, A N B și MA_1D, AA_1B, rezultă

$$\frac{MD}{AB}=\frac{ND}{NA},\qquad \frac{MD}{AB}=\frac{A_1C}{A_1B=A_1C},$$

sau

$$\frac{DN}{NA}=\frac{DA_1}{A_1C},$$

care exprimă că NA_1 e paralelă cu A C; dar NA_1 trecând prin mijlocul lui B C, va trece și prin mijlocul lui B P.

Soluția II-a. Se știe că într'un trapez A M D B, dreapta N A, ce unește intersecția diagonalelor cu a laturilor neparalele, trece prin mijloacele laturilor D M, A B; dar, unind mijloacele laturilor B C, A B, dreapta N A, e paralelă cu A C și taie orice dreaptă ce trece prin B, în părți egale.

Au rezolvat astfel problema, d-nii *Anițescu N. Nicolae, Constantinescu C. Vasile* (lic. Militar, Târgu Mures) și *Theodorescu N. Dorin* (lic. Militar, M-rea Dealu).

Observare. Se poate simplu proba, teorema de bază a soluției a II-a, căci într'un patrulater complet A_1MNDAB, o diagonală A B le taie armonic pe celelalte două; dar pe M D o taie la infinit, deci pe A B în conjugatul punctului dela infinit, adică mijlocul lui A B.

Așa au procedat D-nii *Anițescu* și *Theodorescu.*

N M.

Problema 1696. — *Să se arate că:*

$$\sin 4x \cos(x+30^0)\cos(x-30^0)=\cos x \cos 2x \sin 3x.$$

N. N. MIHAILEANU

Notând cu E, prima parte a relației și ținând seama că

$$\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2 b-\sin^2 a$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

scriem

$$E = 4 \sin x \cos x \cos 2x (\cos^2 30^0 - \sin^2 x) =$$

$$\cos x \cos 2x (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = \cos x \cos 2x \sin 3x.$$

Soluții date de d-nii: *Andrievici N.* (lic. Militar, M-rea Dealu), *Anițescu N. N.*, *Borneas Marius*, *Brădeanu N.*, *Buznea D. D.* (lic. Militar, M-rea Dealu), *Calciu Ghenade*, *Cetățeanu St.* (lic. Șincai, București), *Cristea I. N.* (lic. Lugoj), *Damianof Ștefan*, *Dăscălescu S. H.* (Focșani), *Deciulescu Gh.* (lic. Militar, M-rea Dealu), *Diaconescu D.* (lic. T-Severin), *Diaconescu M.* (lic. Militar, M-rea Dealu), *Georgescu B.* (Colegiul Craiova), *Gligor N. I.* (lic. Arad), *Joe S.* (lic. Libros, București), *Jidanu I. C.* (lic. Beiuș), *Lepolszky C.* (Cluj), *Luca I. I.* (lic. Arad), *Logofătu I.*, *Mihăileanu C. A.* (lic. Arad), *Mihoc N. O.*, *Mocanu I.*, *Modâlcă S. E.* (lic. Turnu-Severin), *Mureșan I. O.* (lic. Arad), *Papadopol D. Elena* (lic. Bacău), *Pasere E.* (lic. Militar, Târgu-Mureș), *Pettechi M.*, *Schapira S.*, *Serban I. C-tin*, *Șandor V.*, *Staicu I. N.* (lic. Militar, M-rea Dealu), *Stamate I. I.* (Lugoj), *Ștefan C. T.* (Tâmna), *Stoenescu D. M.* (lic. Militar, M-rea Dealu), *Tătaru A.* (lic. Orăștie), *Vijelie G. E.* (lic. Militar, M-rea Dealu), *Zigu S.* (lic. Vaslui).

PROBLEME PROPUSE

1817. — Să se găsească un număr de forma $a\,a\,b\,b$ din care scăzând 2 să obținem un patrat perfect.

I. I. STAMATE

1818. — Să se stabilească inegalitățile:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \geqq 2c(a-b) + 2ab$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqq 2a(b+c+d) - 2(bc + bd + cd),$$

a, b, c, d fiind numere reale.

LT. C. D. IONESCU-TIU

1819. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = a \\ (x^3+1)(y^3+1) = b. \end{cases}$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

1820. — Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y + b\,y^2 = t^2 \\ b\,x^2 + a\,x\,z + z^2 = u^2. \end{cases}$$

A. GLODEN

1821. — Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt{x} - 3}{x+3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+3}{x-3} = \operatorname{arc\,tg} \frac{287\,x}{108(9 - 2x\sqrt{x})}.$$

C-TIN I JIDANU

1822. — Să se afle maximul și minimul funcțiunii

$$x = \frac{a \sin\theta + b \cos\theta}{c \sin\theta + d \cos\theta},$$

a, b, c, d fiind constante.

V. ALACI

1823. — Se dă elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și o directoare corespunzătoare focarului F $(c, 0)$, $x = \frac{a^2}{c}$. Să se determine pe această directoare un punct P, astfel ca tangentele duse din el la elipsă, să taie axa Oy subt un segment egal cu axa mare $2a$.

STEFAN MUSTA

1824. — Să se determine poziția de echilibru a unui sistem de forțe $F_1, F_2, \ldots, F_n$, ale căror intensități sunt în progresie aritmetică,

$$F_i = k\frac{i}{n}\overline{MM_1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (k = \text{constant}).$$

La ce corespunde din punct de vedere mecanic cazul limită $n = \infty$?

RADU BADESCU

1825. — Fiind date integralele

$$\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x(1+\sin 2x)}, \quad \beta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}(1+\sin 2x)},$$

să se stabilească relația:

$$e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{2-\beta}.$$

C. BORS

ERRATA.

Corrections dans l'article „Au sujet des produits magiques et panmagiques" par le Dr. *Erich Stern* (Amsterdam) en Nos. 11 - 12, pp 137—140:

1. p. 148, col. I, ligne 1 de la note: au lieu de *la carré*, lire *le carré*.
2. p. 139, col. II, ligne 2: au lieu de *t*, lire *(t*, .
3. p. 139, col. II, ligne 7: au lieu de *5*, lire 15.
4. p. 139, col. II, Fig. IX: pour le cinquième nombre de la rangée avant-dernière, au lieu de *3*, lire 13.

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetica și Teoria Numerelor.

		Pag.
Dr. E. Stern	Carrés à produits magiques	49
Dr. E. Stern	Au sujet des produits magiques et panmagiques	137, 157

b) Algebra.

A. Gloden	Sur les chaînes multigrades	125

c) Trigonometria.

V. Alaci	Trigonometria patratică	3, 17, 29, 41, 57, 81
V. Alaci	Transformarea rombică și antirombică. Transformările $(\overline{OA}\,\varphi)$	141
E. Vișa	Coordonnée hiperbolice	160

II. REDACȚIONALE.

* * *	Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timișoara	1, 2
* * *	Schimbarea administrației R. M. T.	125

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetica și Teoria Numerelor.

2.[1] **A. Gloden**	Egalités vraies aux R premiers degrés, formées avec les $(k+1)$ premiers nombres	25
4. **V. Thébault**	Curiosités arithmétiques	37
5. **A. Gloden**	Chaînes trigrades avec 6 ou 8 termes par maillon	37
9. **A. Moessner**	Magisches Quadrat 1	73
10. **A. Moessner**	Zwei Spezialfälle von magischen Figuren	73
12. **A. Moessner**	Bemerkung zur relation $A_1, A_2, A_3, A_4 \overset{3}{=} B_1, B_2, B_3, B_4$	128
15. **A. Moessner**	Magisches Quadrat 1940	153

b) Algebra.

1. **A. Gloden**	Sur le système diophantien: $A_1^p+A_2^p+A_3^p+A_4^p=B_1^p+B_2^p+B_3^p+B_4^p$ $(p=1,3)$	13
6. **A. Gloden**	Une solution des équations diophantiennes: $xyzt+u^4=v^2$, $xyzt+u^4=v^4$, $xyzt+u^4=v^3$,	52
8. **A. Gloden**	Note d'analyse indéterminée, sur l'équation $aX^3+bY^3=Z^3$, a et b étant donnés	72
11. **A. Gloden**	Trouver 3 nombres de la forme x^2, y^{2n}, z^2 en progression arithmétique	121
13. **A. Gloden**	Résoudre en nombres entiers $x^6+2x^5y+3x^4y^2+4x^3y^3+3x^2y^4+2xy^5+y^6=t^4$	151

[1]) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

c) Geometrie.

		Pag.
3. **Gh. Buicliu**	Asupra problemei 1466	25
14. **M. V. G. Cavallaro**	Généralisations du théorème de *Brahamegupta*	151

d) Trigonometrie.

7. **V. G. Cavallaro**	Vision trigonométrique d'une théorème important	53
16. **V. Alaci**	Transformarea $(\overline{OA_1}, \varphi_1; \overline{OA_2}, \varphi_2; \ldots \overline{OA_n}, \varphi_n)$	148

IV. BIBLIOGRAFIE.

Th. Angheluță	Sur une limite des modules des zéros des polynomes	129
R. Cl. Archibald	Outline of the hystory of mathematics	27
R. Bădescu	Sur l'extraction de l'or par la méthode de la cynuration	153
R. Bădescu	Sopra una certa serie di *Laurent* di due variabili	153
R. Bădescu	Semplificazioni ed estensioni del metodo di *Picone* per l'integrazione della equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico	153
R. Bădescu	Asupra unei probleme a lui *Goursat*	153
A. S. Bang	Über Summen von fünften Potenzen	39
J. Barral Souto	Teoria racional de los sistemas economicos	55
J. Barral Souto	Interpolation y ajustamento de la curva logistica generalizada	55
W. Barret	Sur la structure des grupes semisimples réels	122
Boletin Matematico	38, 54, 74, 122, 129, 153, 168	
M. St. Botez	Su la somma di alcune successioni di numeri	74
M. St. Botez	Concepția idealistă a Matematicilor în antichitate	74
M. St. Botez	Sur la zone de convergence des quelques séries syntagmatiques	153
Buletinul Facultății de Agronomie din Cluj		129
Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences		26
Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timișoara		26
C. D. Bușilă	Învățământul technic superior p. II.	39
C. Cândea	Titluri și lucrări	122
V. G. Cavallaro	Richerche di trigonometria relative ad un triangulo fundamentale mediante serie triangolari ad esso legate	26
V. G. Cavallaro	Equazioni trinomie et problema geometrico della divisione ρ nel quale rientra quella della divisione aurea risolvibili speritalmente con metodi fisici	27

		Pag.
V. G. Cavallaro	Sugli angoloidi	27
V. G. Cavallaro	Sulla vicendevole dipendenza dei metodi fondamentali della trisezione dell'angolo	27
V. G. Cavallaro	Some notable properties on the new geometry of the triangle	27
V. G. Cavallaro	Fattoriale del trianglo e dei poligoni	27
V. G. Cavallaro	Teoremi notevoli su un tetraedro autonormale singulare	27
V. G. Cavallaro	Nuove espressioni notabili dei raggi dei carchi di *Lemoine* e di *Brochard* et di altri elementi importanti della moderna Geometria del triangolo	27
V. G. Cavallaro	Nuove richerche sulla genesi della sezione aurea . . .	27
V. G. Cavallaro	Sugli esagoni inscriptibili aventi ivertici sugli estremi di tricorde concorrenti .	27
V. G. Cavallaro	Questioni e formule fondamentali nei sistemi di punti petenziali e radicali d'ordine *m* e di speci qualunque .	27
V. G. Cavallaro	Movimento su piani inclinati	27
V. G. Cavallaro	Nuove formule approssimate relative a lati di poligoni superiori, ai numeri *e* π alla constante *d'Eulero*, etc. .	27
V. G. Cavallaro	Nuovo richerche geometriche	54
V. G. Cavallaro	Un nuovo solido	54
V. G. Cavallaro	Due funzioni continuee e due proporsioni geometriche concomitanti. Sul quadroangolo. Appunti bibliografici	54
V. G. Cavallaro	Storia della geometria dal triangolo in Italia Sul segmento di *Brocard* . . .	54
V. G. Cavallaro	La dimonstrazione di *Huggens* del teorema pitagorico conformemente generalizzata sur un triangoto qualunque	54
V. G. Cavallaro	Una notevole construzione che deduce l'angolo di „*Brocard*" dai centri isogone	122
V. G. Cavallaro	Fondamenti vinco lati e completi delle geometrografie, elamenti per la riduzione simbolica del linguaggio construttivo, note varie e bibliografia	122
V. G. Cavallaro	Soiluppo naturale e visione unitaria nella Geometrîa del Triango	122
V. G. Cavallaro	La genesi e la sviluppo naturale delle construzioni classiche relative ai punti di *Brocard*, di *Lemoine* etc.	122
G. G. Constantinescu	Criteriile de convergență ale seriilor cu termeni constanți	154
O. Enulescu	Teorema lui *Rolie*	168
Gazeta Matematică	14, 26, 38, 54, 74, 122, 129, 153,	168
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les réseaux invariants égaux	55
V. G. Gheorghiu	Forța electromotrice produsă prin mișca ea electrozilor în diferite soluții (Teză)	168
V. G. Gheorghiu et N. Calinicenco,	Relatioos entre la salinité de l'eau de la *Mer Noire* et la conductibilité élect ique, la densité, ou l'indice de réfraction .	168
V. G. Gheorghiu et N. Calinicenco,	Etude sur la variation de la conductibilité électrique de la *Mer Noire*	168
M. Ghermănescu	Sur la variation du moment d'innertie par rapport aux plans passant par une droite	27
M. Ghermănescu	Sur une classe nouvelle de noyaux de *Fredholm* . .	39
A. Gloden	De la Mécanique statistique classique aux Mécaniques statistiques quantetiques	26
A. Gloden	Sur une méthode de resolution d'équations diophantiennes homogènes du troisième degrè	153
N. Hatzidakis	Congruences et complexes des courbes et des surfaces	26
H. E. Hermes	*Hormanon* und *Baryon*. Eine Attraktions- u Gravitations-Hypothese	27
C. Iacob	Sur la formation du potentiel complexe de l'écoulement plan d'un liquide dans un domaine multiplement conexe	39
C. Iacob	Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème de *Dirichlet* . .	39
C. Iacob	Sulla generalizzazione di una formula di *Cisotti* e una applicazione allo studio dei movimenti lenti di un fluido comprimibile	39
C. Iacob	Sur la coefficient de contraction des jets gazeux . .	39
C. Iacob	Sur quelques conditions aux limites susceptibles de déterminer une function analytique	39
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de algebră p. II	122
D. V. Ionescu	L'application d'une formule de *T. J. Stieltjes* a un problème de M. *D. Pompeiu*	168
N. Kritikos	Sur quelques propriétés des ensembles convexes . .	39
Gino Loria	Nel secondo cantenario della nascita di *G. L. Lagrange*	26
Gino Loria	Per una piu perfetta connoscenza della scuola galeliana	26
Gino Loria	*Charles Sturm* et son oeuvre mathématique	153
Gino Loria	Una problema aritmetica che puo essere stato rizolto dogli antichi Greci . . .	153
Gino Loria	Triangles équilatéraux dérivés d'un triangle quelconque .	153
D. I. Mangeron	Memoriu de titluri și lucrări	151
St. I. Mateescu	Les sédiments de couleur rouge et la formation répetée des sols latératiques	

		Pag.
	dans les regions Carpatiques de Roumanie	153
Mathematica	 26,	54
Numerus	. . . . .	14
M. Petrovitch	Thèorèmes généraux sur les équati ns différentielles algébriques	26
Pitagora	. . . 26, 39, 74, 129, 153,	168
W. Prager	On *Hencky-Prandtl* Lines .	55
W. Prager	On isotropic materials With continuons from elastic to plastic state	55
W. Prager	Über Systeme von Kurven-Kongruenzen	55
Dr. C. Predescu	La pluie L'évaporation . .	168
Dr. C. Predescu	La température à Cluj . .	168
Dr. C. Predescu	Humidité Atmosphérique. La tension de la vapeur d'eau atmosphérique	168
I. Protopopescu	Supralărgirea şi supraînălţarea căii în curbă . . .	129
R. Rădulet	Zur Theorie der Vektorfelder	153
R. Rădulet	Rechteckige Wanderwellen auf Übertragungsleitungen	153
Revista de Ciencias	 38,	74
Revue Mathématique	de l'Union Interbalcanique	159
W. Sierpinski	Sur les fonctions inverses aux fonctions satisfaisant à la condition de *Baise* . . .	54
W. Sierpinski	Sur un ensemble à propriété λ	54
Dr. E. Stern	Nouvelle méthode pour construire et de nombrer certains carrés magiques d'ordre 4 m. avec application aux Parcours magiques . . .	80
Dr. E. Stern	Résumé de contributions à une théorie générale mathématique des carrés magiques	27
Dr. E. Stern	Über ireguläre pandiagonale	27
Dr. E. Stern	Félicitation magique au 75e anniversaire du Général *E. Cazalas*	74
Dr. E Stern	Professeur *D. N Lehmer* .	122
Dr. E. Stern	Kursformeln für Anleichen mit gleichmässig gestaffelten Zins	153
Ştiinţă şi progres	. . . . . 14, 38, 74,	168
S. Stoilov	Leçons sur les principes topologiques de la Théorie des fonctions analytiques .	54
C. Teodorescu	Compararea încercărilor de laborator pentru ciment .	122
V. Thébault	Sur des nombres curieux	129
V. Thébault	Sur l'hexagone à côtés consécutifs rectangulaires . .	153
V. Thébault	Géométrie du triangle et du tétraèdre	168
V. Thébault	Sur des cercles associés à un triangle	168
O. N. Ţino	O problemă de înscriere .	153
L. Toscano	Numeri di Stirling generalizzati, operatori diferenziali e polinomi ipergeometrici	153
T. T. Vescan	Teze, prezentate Facultăţii de Ştiinţe din Cluj pentru obţinerea titlului de doctor în Ştiinţele fizice	122
T. T. Vescan	Note sur les orbites relativistes des planètes . . .	122
T. T. Vescan	La théorie des courbes définies comme l'intersection des deux surfaces représenteés paramétriquement	168

V. DIVERSE INFORMAŢIUNI.

Acordarea premiului din fondul creiat la R. M. T. pe seama unui elev al liceului „Ion Maiorescu" din Giurgiu, publicat în R. M. T., anul XVII, No. 9, pag. 100 31

Comemorarea *Gheorghe Ţiţeica* 168

VI. ERATA.

Corection dans l'article „Carrés à produits magiques" par le Dr. *E. Stern* 122

Corection dans l'article „Au sujet des produits magiques et panmagiques" par le Dr. *E. Stern* . . 137

VIII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XIX. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I	17
50	110	„	
69	142	„	
88	174	„	
92	187	„	
98	187	„	
100	14	II	
110	14	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
164	94	„	
175	110	„	
178	126	„	
185	126	„	
191	142	„	
194	142	„	
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III	
235	30	„	
244	46	„	
255	62	„	
259	62	„	
268	78	„	
275	94	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	142	„	

1).	2).	3).	4)
313	174	III	
315	174	„	
317	174	„	
344	30	IV	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
444	30	„	
450	46	„	
458	62	„	
478	94	„	
479	94	„	
489	126	„	
516	174	„	

1).	2).	3).	4).
519	190	V	
524	190	„	
531	14	VI	154
	122	IX	
535	30	VI	
542	46	„	
543	46	„	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
658	102	„	
686	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
851	96	IX	
858	108	„	
860	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	
924	60	„	
938	84	„	
939	84	„	
954	108	„	
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	
1001	36	„	
1002	36	„	

1).	2).	3).	4).
1008	48	XI	
1012	48	„	
1017	60	„	
1018	60	„	
1027	72	„	
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1044	96	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	132	„	
1077	138	„	
1085	12	XII	
1093	24	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1125	72	„	
1126	72	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1142	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1174	138	„	
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1195	36	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	

1).	2).	3).	4).
1223	72	XIII	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1231	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1280	24	„	
1289	36	„	
1290	36	„	27
1295	36	„	
1296	52	„	15
1298	52	„	39
1299	52	„	
1300	52	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1322	88	„	
1323	88	„	
1325	88	„	
1327	88	„	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1371	12	„	74
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	

1).	2).	3).	4)
1380	24	XV	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1402	60	„	
1405	60	„	
1406	60	„	123
1407	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	
1419	84	„	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1454	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	
1486	40	XVI	
1489	52	„	
1490	52	„	
1492	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1496	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1502	64	„	76
1507	76	„	
1511	76	„	
1514	88	„	
1516	88	„	
1525	100	„	15

1).	2).	3).	4).
1530	112	XVI	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	
1536	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	
1545	124	„	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1561	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1568	12	„	
1571	24	„	
1574	24	„	
1575	24	„	
1577	24	„	
1581	36	„	
1582	36	„	
1583	36	„	
1586	48	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1590	48	„	
1594	60	„	
1595	60	„	
1596	60	„	
1597	60	„	77
1600	60	„	
1602	72	„	
1604	72	„	
1605	72	„	
1607	72	„	
1609	72	„	
1610	84	„	
1112	84	„	
1613	84	„	
1614	84	„	
1615	84	„	
1617	84	„	
1618	96	„	
1621	96	„	
1622	96	„	
1624	96	„	
1626	108	XVII	
1627	108	„	
1628	108	„	
1629	108	„	
1630	108	„	
1631	108	„	
1632	108	„	
1633	120	„	
1634	120	„	
1636	120	„	
1637	120	„	
1638	120	„	55
1639	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1642	132	„	
1643	132	„	
1644	132	„	
1645	132	„	
1646	132	„	
1647	132	“	
1648	132	„	
1651	144	„	
1652	144	„	
1653	144	„	
1654	144	„	
1655	144	„	
1656	144	„	
1657	144	„	78
1658	12	XVIII	
1659	12	„	
1660	12	„	
1661	12	„	
1662	12	„	
1664	12	„	
1665	12	„	
1666	24	„	
1667	24	„	
1668	24	„	
1669	24	„	
1670	24	„	
1671	24	„	
1672	24	„	
1673	24	„	79
1674	36	„	
1675	36	„	
1676	36	„	
1677	36	„	
1678	36	„	
1679	36	„	
1680	36	„	
1681	48	„	
1682	48	„	
1683	48	„	
1684	48	„	
1685	48	XVIII	
1686	48	„	
1687	48	„	
1688	48	„	
1689	60	„	
1690	60	„	
1691	60	„	
1692	60	„	
1693	60	„	
1694	60	„	
1695	60	„	
1696	60	„	
1697	72	„	
1698	72	„	
1699	72	„	
1700	72	„	
1701	72	„	
1702	72	„	
1703	72	„	
1704	84	„	
1705	84	„	
1706	84	„	
1707	84	„	
1708	84	„	
1709	84	„	
1710	84	„	
1711	84	„	
1712	96	„	
1713	96	„	
1714	96	„	
1715	96	„	
1716	96	„	
1717	96	„	
1718	96	„	
1719	96	„	
1720	108	„	
1721	108	„	
1722	108	„	
1723	108	„	
1724	108	„	
1725	108 / 120	„	
1726	108	„	
1727	108	„	
1728	120	„	
1729	120	„	
1730	120	„	
1731	120	„	
1732	120	„	
1733	120	„	
1734	120	„	
1735	120	„	
1736	132	„	
1737	132	„	
1738	132	„	
1739	132	XVIII	
1740	132	„	
1741	132	„	
1742	132	„	
1743	132	„	
1744	149	„	
1745	149	„	
1746	149	„	
1747	149	„	
1748	149	„	123 / 129
1749	149	„	
1750	149	„	
1751	149	„	
1752	16	„	
1753	16	XIX	
1754	16	„	
1755	16	„	
1756	16	„	
1757	16	„	
1758	16	„	
1759	16	„	
1760	27	„	
1761	28	„	
1762	28	„	
1763	28	„	
1764	28	„	
1765	28	„	
1766	28	„	129
1767	28	„	
1768	40	„	
1769	40	„	
1770	40	„	
1771	40	„	
1772	40	„	
1773	40	„	
1774	40	„	
1775	40	„	
1776	56	„	
1777	56	„	
1778	56	„	
1779	56	„	
1780	56	„	
1781	56	„	
1782	56	„	
1783	56	„	
1784	80	„	
1785	80	„	
1786	80	„	
1787	80	„	
1788	80	„	
1789	80	„	
1790	80	„	
1791	80	„	130

1).	2).	3).	4).
1792	124	„	
1793	124	„	
1794	124	„	
1795	124	„	
1796	124	„	
1797	124	„	
1798	124	„	
1799	124	„	

1).	2).	3).	4).
1800	124	„	
1801	136	„	131
1802	136	„	
1803	136	„	
1804	136	„	
1805	136	„	
1806	136	„	
1807	136	„	

1).	2).	3).	4).
1808	136	„	
1809	156	„	
1810	156	„	
1811	156	„	
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1815	156	„	
1816	156	„	

1).	2.)	3).	4).
1817	169	„	
1818	169	„	
1819	169	„	
1820	169	„	
1821	169	„	
1822	169	„	
18.3	169	„	
1824	169	„	
1825	169	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E., 1.
Abel, 153.
Abramescu N., 1, 26, 54, 74, 136, 153.
Adam D. R., 1.
Adamescu N., 1.
Alaci V., 1, 3, 16, 17, 26, 28, 29, 40 41, 56, 57, 80, 81, 111, 120, 123 124, 125, 129, 130, 131, 136, 137, 141, 156, 157, 167, 168, 169.
Almăjan P., 1, 28.
Alsted H. I., 26, 38.
Amărăşteanu M., 15, 27, 40.
Amiot A., 53, 54.
Anastasescu M. M., 55.
Anastasiade I., 1.
Andrievici N., 55, 77, 78, 169.
Andronescu P., 1.
Andrunachievici A. V., 77.
† Angelescu A., 14.
Angheluţă Th., 1. 129.
Aniţescu N., 55, 56, 77, 168, 169.
Apostol R., 16.
Archibald Cl. R., 27.
Ardelean S., 1.
Areşteanu H., 79.
Arghir I., 1.
Armean I., 14.
Aubert, 129.
Avogadro, 14.

Bacaloglu E., 38.
Bădescu R., 122, 153, 169.
Baidaff B. I., 1. 54, 122, 153, 168.
Baire, 54.
Bakony C., 1.
Bakony C., 55, 77.
Balazs D., 1.
Bănărescu M., 1.
Banciu I., 1.
Bang S. A., 39.
Barbette E., 138.
Barbilian D., 14, 129, 153.
Bărglăzan A., 1, 26.
Bârlea V. S., 70.
Baron C., 1.
Barral S. I., 55.
Barret W., 122.
Bergmann Str., 26, 129.
Berindei L. T., 77.
Beşleagă N. Fl., 15.
Blanko C. B., 54.
Blaşian V., 1.
Bobârnac M., 1.
Boldescu P., 39, 168.
Bonea I., 1.
Boole, 14.
Borneas M., 26, 55, 77, 79, 169.
Borş C., 129, 130, 136, 169.
Borsuk K., 74.
Botea N. G., 168.
Botea E. G., 168.
Botez M., 1, 74, 153.
Botez M., 1.
Botez St. M., 136, 153.
Brădeanu N., 169.
Brahamegupta, 151, 152.
Bratu Gh., 1, 54.
Breazu D., 1.
Brocard, 54, 122.
Buicliu G., 1, 15, 16, 26, 28, 38, 40, 54, 56, 76, 80, 123, 124, 129, 154, 156.
Bunescu A., 122.
Buşilă C., 39.
Buznea D. D., 55, 79, 168, 169.
Calderon A., 74.
Calciu Gh., 169.
Câlniceanu C., 1.
Călugăreanu G., 14, 26, 54.
Câmpan Florica, 38.
Canari A., VI. 14.
Cândea C., 1, 26, 122.
Carlo G., 152.
Catona V., 1.
Cavallaro G. V., 26, 27, 54, 122, 152.
Cazalas E., 52, 73, 74, 138.
Cazanacli V. P., 15, 27, 77.
Cerchez M., 28, 79.
Cetăţeanu S., 55, 74, 77, 79, 80, 169.
Ceva, 38, 54, 74.
Chesles, 152.
Cherţmann S. M., 130.
Chirvai I. V., 76.
Ciorănescu N., 26.
Cisotti, 39.
Claudian V., 1, 122.
Coca A., 1.
Coman A., 1.
Comănescu A., 1.
Comberousse, 53.
Constantinescu G., 1.
Constantinescu G. G. 1, 26, 122, 153, 154, 168.
Constantinescu C. V., 55, 168.
Contrea A., 1.
Coşniţă C., 14, 26, 39, 74, 129.
Costăchescu D. C., 1, 16.
Cristea I. N., 56, 77, 169.
Cristescu D., 55.
Cristescu I., 1.
Cristescu V., 3, 74.
Cristobal, 74.
Cristodulo N., 1.

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Cservény I., 1.
Curea I., 1, 79.

Damianof St. 169.
Dăscălescu S. H., 55, 77, 129, 169.
Demetrescu G., 1.
Deciulescu Gh., 169.
Denjoy A., 26.
Diaconescu M. I. C., 77, 78, 79, 169.
Diaconescu D. I., 55, 77, 79, 169.
Diaconescu N., 1.
Dirichlet, 39, 54.
Dobrozemsky M., 1.
Dragon I. G., 79.
Dumitrescu G., 38.
Dumitriu-Dada, 1.

Einstein, 26.
Enulescu O., 168.
Euclid, 14.
Ewing M. G., 38.

Feldheim E., 129.
Feuerbach, 74.
Fitting F., 138.
Florescu M., 1.
Florescu V., 16, 74.
Fortet R., 38.
Frătici I., 1.
Fredholm, 39.
Froda Al., 54.

GarciaG., 38, 74.
Georgescu D., 1, 129.
Georgescu B., 169.
Geiringer Hilda, 129.
Gheorghiu A., 74.
Gheorghiu Th. G., 3, 26, 54, 55, 56, 80, 122, 124, 136, 153.
Gheorghiu V. G., 168.
Gheorghiu V., 1. 26.
Ghermănescu M., 1, 26, 27, 39, 129, 169.
Ghițescu Sp., 1.
Gil Varela I., 153.
Gligor N. I.. 55, 77, 79, 169.
Gloden A., 1, 14, 25, 26, 28, 38, 40, 53, 73, 122, 125, 136, 151, 153, 169.
Gouzales O. M., 38.
Goursat E., 14, 122, 153.
Grigore V., 2.
Guenther S., 138.
Guldin, 54.
Gutierrez Novoa, 153, 168.

Hadwiger H., 54.
Hatzidakis N., 26.
Heaviside, 54.
Herman A. V., 76.
Hermes E. H., 27.
Herrera L., 74.
Haurtley A., 54, 122.
Hilbert, 26
Hoborski A., 54.
Hompola I. T., 76, 80.
Hompola T., 15.
Hristea H., 1.

Iacob C., 39, 54.
Ilinț S., 14.
Ioachimescu G A., 122
Ionescu-Biss H. P., 1.
Ionescu-Bujor Ct., 1, 122, 129, 168.
Ionescu-Țiu D. C., 1, 16, 40, 76, 12 156, 169.
Ionescu I., 168
Ionescu V. D., 54, 129, 168.
Iorgulescu T, 1.
Iulia Gaston, 14.
Ivănescu C., 1, 27, 39, 74.

Jidanu I. C., 16, 55, 56, 77, 79, 124, 130, 169.

Kamke E., 54.
Karamata I., 54.
Kariya, 39.
Kentaro Y., 26.
Kielburger M, 1.
Kluegel S. G., 138.
Kriticos N., 39.

Lagrange N. G., 26.
Laguerre, 122.
Lalescu T., 15
Lambrino G., 1.
Lațiu V., 2, 26.
Laurent, 153.
Lemoine, 122.
Leonida D., 2.
Lepolszky C., 169.
Linteș I., 2, 122.
Liteanu G., 2.
Logofătu I., 169.
† Longinescu G., 74.
Loria Gino, 26, 153.
Lubolski S., 54.
Luca I. I., 55, 169.
Lungu I., 14.
Lupan A., 2.
Lupescu C., 16, 55, 77, 79.

Macovski E., 2.
Mahrenholz I., 124, 129, 130.
Mălacea I., 74.
Mangeron I. D., 26, 154.
Manughevici C., 2.
Manuilă S. A., 55.
Marcinkievicz I., 26.
Mărculescu O., 74.
Marcuzon S. L., 55.
Mardan D., 2.
Marian V., 26, 38, 122, 129, 168.
Marinescu I., 2.
Markovic D., 54.
Mateescu S., 2, 153.
Matei D. D., 55, 77.
Mățieș V. I., 15, 39, 136.
Menelau, 38.
Mereuță E., 156.
Meyer, 26.
Mihai Edith, 2.
Mihăileanu C. A., 77, 79, 169.
Mihăileanu N. N., 2, 16, 26, 28, 38, 40, 78, 156.
Mihăilescu G. E., 54.
Mihăilescu N., 74, 168.
Mihalcea V. V., 15, 76.
Miboc N. O., 130, 169.
Miloia I., 2.
Mioc V., 2, 124, 129, 130.
Miquel, 26.
Mocanu C., 74.
Mocanu I.
Modâlcă S. E., 28, 55, 77, 79, 169.
Moessner A., 38, 49, 73, 74, 124, 128, 136, 153.
Mollweide B. C., 138.
Montel P., 14, 26.
Motaș C., 77.
Mueller W. T., 138.
Mureșan I, 77.
Mureșan O., 55, 76, 169.
Murgulescu Elena, 2.
Murgulescu G. I., 2.
Musta S., 156, 169.

N. M., 77, 78, 80.
Nadașan S., 2, 125, 137, 157.
Naneș Cornelia, 80.
Naneș G., 2.
Nannei, 74.
Negrea A. L. M., 76.
Negrea M., 55.
Negulescu A. St., 16.
Neumann Maria, 124, 156.
Nicolau A., 2.
Nicolau P., 2, 26.
Niculescu D., 168.
Niculescu C., 153.
Niculescu M., 26, 54.
Novac V., 74.
Novi G., 53.

Obrechkoff N., 54.
Ogrin N, 2.
Onicescu O., 2, 129.
Orășeanu C., 2, 122.
Orășeanu G., 2.
Ozanam I., 138.

Panaitescu S., 122.
Papadopol D. Elena, 79, 130, 169.
Pappus, 53, 54.
Pardies G I., 122.
Pasăre E., 77, 169.
Patriciu V., 2.
Petrescu A., 2.
Petrescu C. A., 77.
Petrescu P. B., 77.
Petrovich, 26.
Pettechi M., 169.
Picone, 153.

Popa D. M., 79.
Pompeiu M. D., 168.
Popescu A., 55.
Popescu C., 156.
Popescu E., 2.
Popescu I., 2. 26.
Popescu N. Mărioara, 40.
Popescu-Zorica N. A., 55, 77.
Popoviciu G., 55.
Popoviciu M., 77, 130.
Popoviciu T., 26, 129. 168.
Pora A. E., 14, 74.
Porumbescu T. D., 55.
Postelnicescu C. M., 40, 76.
Prager W., 55.
Predescu C., 39, 168.
Protopopescu I., 2, 129.
Purcariu I., 2.

Racliş N. R., 2, 14.
Răduleţ R., 2, 153.
Raynor G. E, 157.
Reischer L. H., 55.
Raled I., 168.
Rignaun M., 72.
Ripianu A., 16.
Roberts S., 157.
Roibănescu C., 2.
Rosemblatt A., 38, 74.
Roşu A., 38.
Roth I. A., 77.
Rouché E., 53, 54.
Rouché M., 53.
Rousse Ball W. W., 138.

Sandor V., 55, 169.
Săndulescu I. D., 74.
Săruleşteanu I. E., 55, 77, 130.
Sauciuc L., 2.
Savin C. I., 2.
Săvulescu S., 15, 27.
Scărlătescu D., 2.
Schapira S., 169.
Schileru I., 2.
Schmidt, 26.
Schubert H., 138.
Schwendter D., 137.
Scoopan A., 2.
Segal Z., 124, 129.
Serbescului C.,
Sergescu P., 2, 74, 122, 129.
Şerban I. C., 164.
Severineanu C., 2.
Sierpinski W., 26, 54.
Simionescu G. D., 2, 74.
Sispanov S., 54, 122.
Slavov I., 55, 77, 79.
Smighelschi O., 2.
Solomon I. I., 55, 77.
Solorzanto E., 74.
Staicu I. N., 124, 169.
Stamate I. I., 16, 40, 55, 56, 80, 169.
Stamatescu I., 2.
Stambuleanu A., 2.
Stan A., 2.
Stan D., 122.
Stăncescu C., 2.
Stantzel E., 2.
Ştefan C. T., 79, 169.
Ştefănescu M., 40.
Ştefănescu F. M., 55, 77, 80.
Ştefănescu D. N., 76.
Steiner I., 53.
Stern E., 27, 49, 73, 74, 122, 137, 153, 157.
Stifel M., 137.
Stoenescu D. M., 55, 79, 129, 169.
Stoicescu L., 2.
Stoicescu M., 2.
Stoica D., 168.
Stoilov S., 54.
Stubecher C., 54.
Suhov I., 2.

Takahaski S., 54.
Tănăsescu A. T., 14.
Teleki S., 129.
Tătaru A., 169.
Teodorescu C., 2, 3, 17, 29, 41, 57, 81, 122, 125.
Teodorescu N. D., 168.
Teodosiu A., 2.
Thébault V., 15, 37, 40, 56, 74, 124, 129, 153, 156, 168.
Tilică C. S., 16, 27.
Ţino O., 2, 26, 54, 122, 129, 153.
Titchmarsch C. E., 74
Ţiţeica Gh., 14, 26, 38, 54, 74, 122, 129, 168.
Ţiţeica I. I., 26.
Tolatti C., 26.
Topalescu S. G., 55.
Toscano L., 153.

Văduva F. M., 124, 129, 130, 136.
Vâlcovici V., 2, 14.
Vasu V., 156.
Venter D., 79.
Vescan T., 2, 122, 129, 168.
Viciu A., 2.
Vijelie G. E., 55, 169.
Vişa E., 74, 80, 124, 129, 130, 160, 168.
Vlad I. C., 55.
Vlad I. M., 40, 77.
Vlad I. V., 2.
Vlădescu I., 2.

Weierstrass, 26.
Weiss, 26.

Zagaican I., 16.
Zăgănescu I., 2.
Zaharia N. O., 2.
Zapan G., 2, 38, 129.
Zervos P., 129
Zigmund A., 26.
Zigu S., 55, 169.

Nota Redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Inspector *Vasile Mioc,* asistent la Şcoala Politechnică, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Andrievici N. (1754, 1777, 1778, 1783); *Bakonyi C.* (1783, 1785, 1786, 1787, 1799); *Brădeanu N.* (P., 1799, 1815); *Calciu Ghenade* (1699, 1778); *Logofătu M. Ioan* (1684, 1799, 1815); *Pettechi M.* (1688, 1757); *Nicola Gheorghe* (1697, 1727, 1785, 1799); *Schapira Salo* (1664, 1688, 1693, 1699, 1751, 1783, 1785, 1810); *Şimon Ş. Petru* (1757, 1758, 1761, 1763, 1765, 1773, 1774, 1782, 1783, 1785, 1799 1810); *Sorian Oscar* (P., 1752, 1763); *Staicu I. N.* (1774); *Tica P. Marin-Gall* (1757, 1782, 1790, 1794); *Tilică C. Ştefan* (P., 1482, 1490, 1554, 1547, 1548, 1605, 1630, 1721, 1732, 1752 1761, 1782, 1786); *Ţarălungă Gh. Savel* (1794, 1810); *Văduva F. Marin* (P., 1626, 1683, 1691, 1692, 1736, 1745, 1810); *Venter D-tru* (P., 1658, 1661, 1674, 1677, 1680, 1681, 1689, 1699, 1701, 1707, 1720, 1721, 1727, 1729, 1733, 1746, 1750, 1752, 1754, 1760, 1768, 1776, 1777, 1783, 1799).

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XX, care începe la 15 Martie 1940.

BIBLIOTECA „ASTRA" SIBIU